

Domáce úlohy pre predmet Optimálne riadenie

zimný semester šk.r. 2000—2001

1. Vyriešte ľubovoľným spôsobom úlohu "Optimálne rozdeľovanie zdrojov" formulovanú na prednáške pre prípad $k=2$ a odôvodnite správnosť riešenia.

2*. Naformulujte nasledovný problém ako úlohu optimálneho riadenia. Skúste odhadnúť jeho riešenie.

Dopravný dispečer vie, že nasledujúci (5 dňový) týždeň mu príde 10, 3, 7, 2, 5 vagónov, ktoré musí do konca týždňa vyložiť. Na vykladanie má k dispozícii čatu vykladačov, ktorí vyložia jeden vozeň za dve hodiny. Ak pracujú viac ako 8 hodín, musí im za každú hodinu nadčasov vyplatiť 15\$. Za nevyložený vozeň platí penále 20\$ za deň. Treba rozhodnúť, ktorý deň koľko vozňov majú robotníci vyložiť, aby náklady na dodatočné mzdy a penále boli minimálne. Predpokladáme, že robotníci pracujú len celé násobky 2 hodín a že z jedného dňa na druhý nezostávajú nedovykladané vagóny.

3*. Nasledujúcu úlohu naformulujte ako úlohu optimálneho riadenia.

Stroj na lisovanie šťavy z ríbezlí sa zanáša a podľa toho, koľko bolo na ňom vylisované sa jeho výkon znižuje, a to tak, že po každom kile vylisovaných ríbezlí sa čas lisovania nasledujúceho kila zvýši o 20 minút. Vyčistenie stroja trvá 30 minút. Ríbezle sú balené po 1 kg, ktorý po načatí treba ihneď spracovať. Celkove treba spracovať 5 kg ríbezlí. Treba rozhodnúť, či a po ktorom kile stroj čistiť, aby sa žiadané množstvo spracovalo za najkratší čas.

4. (a) V i -tom období ($i > 0$) dostaneme dôchodok veľkosti D jednotiek. Aká je jeho hodnota v súčasnosti (nulté obdobie), ak predpokladáme, že počas jedného obdobia sa jednej jednotke pripisuje úrok veľkosti r .

*(b) Sformulujte a vyriešte spojitú verziu úlohy (a)

5. Pri označení, ktoré sme použili vo Vete 1 dokážte:

Ak $\hat{U}$, $\hat{X}$ sú optimálne riadenie a odozva pre úlohu $D_0(\hat{x}_0)$ a $\bar{U}_j$, $\bar{X}_j$ sú optimálne riadenie pre $D_j(\hat{x}_j)$ prípadne iné než $\hat{U}_j$, $\hat{X}_j$; potom $\bar{U}$, $\bar{X}$ je tiež optimálne riadenie a odozva pre úlohu $D_0(\hat{x}_0)$.

6. Metódou dynamického programovania riešte nasledovnú úlohu opt. riadenia:

$$x_{i+1} = x_i + u_i, \quad i = 0, 1, \quad (k = 2), \quad x_0 = 1, \quad u_i \in \langle -3, 1 \rangle,$$

$$\max J = \sum_{i=0}^1 f_i^0(x_i, u_i),$$

$$\text{kde } f_0^0(x, u) = x^2 + 2u + 1; \quad f_1^0(x, u) = x^2 - 0,5u^2 - 2u - 1.$$

7*. (a) Napíšte rovnicu dynamického programovania (RDP) pre úlohu optimálneho riadenia (UOR) s účelovou funkciou závislou aj od koncového stavu, t.j.,

$$J(x_0, \mathcal{U}) = \phi(x_k) + \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i).$$

(b) Ukážte, že RDP pre UOR s diskontovým koeficientom, kde namiesto

$$J = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i) \text{ máme } J = \sum_{i=0}^{k-1} (1+r)^{-i} f_i^0(x_i, u_i),$$

vyzerá nasledovne

$$V_j(x) = \min_u [f_j^0(x, u) + (1+r)^{-1} V_{j+1}(F_j(x, u))], \quad j = 0, \dots, k-1,$$

$$V_k(x) = 0, \forall x \in C.$$

Návod: Ako vyzerá $J_j(x_j, \mathcal{U}_j)$ pre úlohu $D_j(x_j)$?

(c) Napíšte RDP pre UOR, kde $J = \sum_{i=0}^{k-1} [(1+r)^{-i} f_i^0(x_i, u_i)] + (1+r)^{-k} \phi(x_k)$.

8. Na poslednej prednáške sme riešili úlohu " Optimálna spotreba" v prípade $r = 0, 5$; $\delta = 0$; $k = 3$; $x_0 = 3$; $x_3 = 2$.

(a) Aké je riešenie tejto úlohy v prípade začiatočnej podmienky (i) $x_0 = 2$, (ii) $x_0 = 4$. Uveďte len výsledok, t.j. optimálne riadenie, jeho odozvu a hodnotu účelovej funkcie.

(b) Riešte úlohu z prednášky v prípade zmeneného δ , pre $\delta = 1$ a pre všetky začiatočné hodnoty x_0 z množiny $\{2, 3, 4\}$. Porovnajte a interpretujte riešenia pre $\delta = 0$ a $\delta = 1$.

9**. Uvažujme nasledovnú úlohu optimálnej obnovy auta.

Nech $\Psi(x)$ je hodnota istého typu auta starého x rokov a nech $\varphi(x)$ sú ročné náklady na údržbu auta x rokov starého. Za predpokladu, že sa budú vyrábať stále tie isté autá, ich cena a náklady na ich údržbu sa nebudú s časom meniť, treba určiť, kedy kupovať nové auto, aby celkové náklady naň za daný počet rokov k boli minimálne. Ďalej predpokladáme, že predaj auta sa uskutočňuje vždy na začiatku roku, nikdy nevlastníme auto staršie ako 5 rokov a že v k -tom roku auto predáme.

Sformulujte úlohu ako ÚOR, napíšte program na jej riešenie metódou dynamického programovania (v ľubovoľnom programovacom jazyku) a pomocou neho nájdite riešenie pre počiatočné stavy (i) $x_0 = 0$, (ii) $x_0 = 1$, (iii) $x_0 = 2$ v prípade, že $k = 10$ a

x	0	1	2	3	4	5	x	0	1	2	3	4
$\Psi(x)$	50	43	37	32	28	24	$\varphi(x)$	2	2	4	3	5

10. Metódou dynamického programovania riešte nasledovnú úlohu

$$x_{i+1} = x_i + a_i - u_i, \quad i = 1, \dots, 5, \quad x_1 = 0, \quad x_6 = 0 \quad u_i \in \{0, \dots, 12\}, \quad x_i \geq 0,$$

$$\min J = \sum_{i=1}^5 [(x_i + a_i - u_i)20 + (u_i - 4)^+ 30], \quad \text{kde } z^+ = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

kde $(a_1, \dots, a_5) = (10, 3, 7, 2, 5)$.

11*. Nasledujúcu úlohu sformulujte ako úlohu optimálneho riadenia a riešte metódou dynamického programovania:

D'Artagnan uháňa na koni z Paríža do Londýna, aby vojvodcovi Buckinghamskému doručil čo najskôr dôverný odkaz od kráľovnej. Na ceste do Calais má 3 stanice, na ktorých si môže vymeniť koňa. Vzdialenosti medzi stanicami (a medzi Parížom a prvou stanicou a poslednou stanicou a Calaisom) sú od Paríža 50, 30, 40, 50 km. Rýchlosť koňa klesá s ubehnutými kilometrami takto: k - tých 10 kilometrov zabehne za $(30 + k)$ minút.

Výmena koňa trvá 13 minút. Treba rozhodnúť, na ktorých staniach má D'Artagnan meniť koňa, aby do Calais prišiel za najkratší čas.

12*. Pre ÚOR (bez ohraničení na riadenie a stav, voľný koniec) :

$$x_{i+1} = x_i - u_i, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad \min J = \sum_{i=0}^{k-1} [(u_i)^2 + (x_i - u_i)^2]$$

nájdite hodnotovú funkciu a optimálnu spätnú väzbu v prípade (i) $k = 5$, (ii) $k = \infty$. Návod: Použite nasledovnú substitúciu $\tilde{u}_i = u_i - \frac{1}{2}x_i$.

13. V LQ probléme riešenom na poslednej prednáške uvažujte účelovú funkciu aj s diskontovým faktorom, t.j.

$$J = \sum_{i=0}^{k-1} (1+r)^{-i} [x_i^T Q_i x_i + u_i^T R_i u_i].$$

Ako bude v tomto prípade vyerať iteračný vzťah pre H_j a W_j ? Návod: Použite výsledok úlohy 7.

14*. Predstavme si zariadenie, ktoré pozostáva z k do série zapojených blokov. Jeho správna funkcia vyžaduje, aby všetky jeho bloky bezchybne pracovali. Spoľahlivosť jednotlivých blokov možno zvyšovať paralelným zapájaním prvkov v každom bloku. Označíme $\phi_j(u)$ pravdepodobnosť správnej funkcie j -teho bloku, ak obsahuje u paralelne zapojených prvkov. Nech c_j je cena jedného prvku v j -tom bloku. Úlohou je rozhodnúť, do ktorého bloku koľko prvkov zapojiť tak, aby pravdepodobnosť správnej funkcie celého zariadenia bola väčšia ako P a aby cena zariadenia bola čo najmenšia. Naformulujte tento problém ako ÚOR a napíšte preň RDP.

15*. Problém stabilizácie národnej ekonomiky môže byť formulovaný ako maximalizácia minimálneho (ročného) národného dôchodku v priebehu k rokov. Takýto problém potom môže viesť k ÚOR nasledovného typu: $x_{i+1} = F_i(x_i, u_i)$, $i = 0, \dots, k-1$, $x_0 = a$, $\max_{\mathcal{U}} J(x_0, \mathcal{U})$, kde $J(x_0, \mathcal{U}) = \min\{x_1, \dots, x_k\}$, $x_i = x_i(x_0, \mathcal{U})$. Odvodte RDP pre takýto problém.

16**. Vymyslite zaujímavú resp. vtipnú úlohu z praxe, ktorá sa dá sformulovať ako úloha optimálneho riadenia a riešiť metódou dynamického programovania. Úlohu sformulujte s konkrétnymi číselnými údajmi tak, aby sa dala v rozumnom čase vyriešiť ručne pomocou tabuľky a vyriešte ju.

17. Uvažujme interval $[a, b]$. Popíšte ho ako množinu S zadanú nerovnosťami a určte $\delta S(a)$, $\delta S(b)$, $\delta S(x)$, $x \in (a, b)$.

18*. Upravte pseudoprincíp maxima (formuláciu i dôkaz) pre prípad, že $C = \mathbb{R}^n$, t.j., pre úlohu bez ohraničení na cieľový stav.

19*. Ukážte, že ak $C = \{x : x^1 = \hat{x}^1, \dots, x^l = \hat{x}^l\}$, kde $l \in \{1, \dots, n\}$, potom z príslušnej podmienky transversality dostávame podmienky $\psi_k^{l+1} = \dots = \psi_k^n = 0$, ak $l \in \{1, \dots, n-1\}$. Ak $l = n$, tak je podmienka transversality prázdna.

20**. Upravte pseudoprincíp maxima (formuláciu i dôkaz) pre prípad, že začiatočná podmienka je daná rovnicou $h(x_0) = 0$. Návod: Uvažujte o J ako o funkcii premenných $(x_0, \mathcal{U})$ s ďalším ohraňčením typu rovnosti $h(x_0) = 0$.

21***. Upravte pseudoprincíp maxima pre prípad, že cieľová množina je daná rovnosťami i nerovnosťami $C = \{x : g(x) = 0, \quad q(x) \leq 0\}$. Návod: Najprv odvodte potrebnú analógiu Vety 1 (z Kuhn-Tuckerovej resp. Johnovej vety pomocou Farkašovej lemy), v ktorej iba časť ohraňčení typu nerovnosti budú tvoriť množinu S , pre ktorú máme variačný kužeľ δS .

22. Ukážte, že ak $C = \{(x_k^1, x_k^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k^1 = x_k^2\}$ potom podmienku transversality je možné zapísať v tvare $\psi_k^1 + \psi_k^2 = 0$.

(b) Nájdite podmienku transversality pre $C = \{(x_k^1, x_k^2, x_k^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_k^2 = x_k^3\}$.

23*. Použitím princípu resp. pseudoprincípu maxima riešte úlohu o optimálnom rozdeľovaní zdrojov formulovanú na 1. prednáške. Porovnajte s riešením získaným metódou dynamického programovania na prednáške.

24. Napíšte podmienky princípu resp. pseudoprincípu maxima pre nasledovnú úlohu optimálneho riadenia a vyjadrite z nich u_i ako funkciu x, ψ .

$$x_{i+1}^1 = x_i^1 + u_i, \quad x_0^1 = 1,$$

$$x_{i+1}^2 = x_i^2 + 2x_i^1 + x_i^1 u_i, \quad x_0^2 = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

kde $-1 \leq u_i \leq 1$. Cieľová množina je $C = \{x_3 : x_3^1 = 0\}$ a minimalizujeme

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 [(x_i^1)^2 + (u_i)^2].$$

25. Uvažujme systém

$$x_{i+1}^1 = ax_i^1 + u_i,$$

$$x_{i+1}^2 = ax_i^2 + u_i,$$

kde $a \in \mathbb{R}$. Overte podmienku riaditeľnosti a nájdite $\Omega(0, k)$ a $\Omega(0)$ v prípade, že

(a) $u_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k-1$;

(b) $u_i \in [-1, 1], i = 0, \dots, k-1$.