

3. Princíp maxima

V tejto kapitole sa budeme venovať inému prístupu k riešeniu úloh optimálneho riadenia, ktorého cieľom je odvodenie variačných podmienok optimality. Tieto podmienky umožnia nájsť optimálne riadenie, alebo aspoň podstatne zmenšiť počet možností.

3.1 Princíp maxima v nelineárnom programovaní

Nutné podmienky pre ÚOR odvodíme tak, že ÚOR prevedieme na úlohu nelineárneho programovania (NLP), pre ktorú sú odvodené nutné podmienky, tieto aplikujeme na našu konkrétnu úlohu a ďalej ich budeme upravovať.

Nutnou podmienkou optimality v nelineárnom programovaní je tzv. Kuhn Tuckerova veta, resp., keď nemáme ohraničenia typu nerovnosti Lagrangeova veta. Tieto vety však vyžadujú splnenie určitých podmienok regularity, ktoré sa však dosť ťažko overujú v našom prípade. Preto je potrebné použiť všeobecnejšie nutné podmienky.

3.1.1 Štandardná úloha NLP.

Ide o úlohu nájsť minimum funkcie f^0 na množine $X = R \cap S$, kde

$$R = \{x : f^1(x) = 0, \dots, f^\rho(x) = 0\}, \quad S = \{x : s^1(x) \leq 0, \dots, s^\sigma(x) \leq 0\}$$

kde $f^0, f^i, s^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sú C^1 . Funkcie $f^i, i = 1, \dots, \rho$ sú ohraničenia typu rovnosti, $s^j, j = 1, \dots, \sigma$ sú ohraničenia typu nerovnosti.

Ak označíme $f = (f^1, \dots, f^\rho)^T; \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\rho, s = (s^1, \dots, s^\sigma)^T; \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\sigma$, môžeme R, S písať v tvare

$$\min_{x \in R \cap S} f^0(x), \quad \text{kde} \quad R = \{x : f(x) = 0\}, \quad S = \{x : s(x) \leq 0\}$$

3.1.2. Aktívne ohraničenia a variačný kužeľ.

Aktívnymi v bode $\hat{x} \in X$ nazývame tie ohraničenia typu nerovnosti s^i , pre ktoré platí, že $s^i(\hat{x}) = 0$. Zvolíme $\hat{x} \in X$ a definujeme množinu $I(\hat{x})$ aktívnych ohraničení

$$I(\hat{x}) = \{i : s^i(\hat{x}) = 0\}$$

a variačný kužeľ $\delta S(\hat{x})$ množiny S v bode $\hat{x}$

$$\delta S(\hat{x}) = \{\delta x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial s^i(\hat{x})}{\partial x} \delta x \leq 0, \quad i \in I(\hat{x})\}.$$

Symbolu δx netreba pripisovať osobitý význam. Z určitých historických dôvodov ním označujeme prvky variačného kužeľa, ktorý je podmnožinou $\mathbb{R}^n$. Možno sa ľahko presvedčiť, že $\delta S(\hat{x})$ je naozaj kužeľ.

Všimnime si, že ak $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_p, \hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_p)$, kde $\hat{x}_i \in S_i, i = 1, \dots, p$, potom $\delta S(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_p) = \delta S_1(\hat{x}_1) \times \delta S_2(\hat{x}_2) \times \dots \times \delta S_p(\hat{x}_p)$.

3.1.3. Nutná podmienka optimality pre úlohu NLP.

Veta 3.1. *Nech $X = R \cap S$, kde $R = \{x : f^i(x) = 0, i = 1, \dots, \rho\}$, $S = \{x : s^i(x) \leq 0, i = 1, \dots, \sigma\}$, ($f^0, f^i, s^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sú C^1). Nech $\hat{x} \in X$ a predpokladajme, že je splnená nasledovná podmienka regularity*

$$\text{vektory } \frac{\partial s^i}{\partial x}(\hat{x}), \quad i \in I(\hat{x}), \quad \text{sú lineárne nezávislé.} \quad (\text{PR})$$

Ak $f^0(\hat{x}) = \min_{x \in X} f^0(x)$, potom existuje vektor $\tilde{\chi} = (\chi^0, \chi) \neq 0$, $\chi \in \mathbb{R}^\rho$, $\chi^0 \leq 0$, taký, že platí

$$\left[\chi^0 \frac{\partial f^0(\hat{x})}{\partial x} + \chi^T \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} \right] \delta x \leq 0 \quad \forall \delta x \in \delta S(\hat{x}) \quad (3.1)$$

Dôkaz. Z predpokladu $f^0(\hat{x}) = \min_{x \in X} f^0(x)$ vyplýva, že existuje také $\chi^0 \leq 0$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I(\hat{x})$ a χ_j , $j = 1, \dots, \rho$, pričom všetky tieto konštanty nie sú súčasne rovné nule, že platí

$$-\chi^0 \left(\frac{\partial f^0(\hat{x})}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} \right)^T \chi + \left(\frac{\partial \bar{s}(\hat{x})}{\partial x} \right)^T \lambda = 0, \quad (3.2)$$

kde $\bar{s}(\hat{x}) = \{s^i(\hat{x}), i \in I(\hat{x})\}$. Vzťah (2.3) platí podľa tzv. Johnovej vety z teórie ne-lineárneho programovania. Poznamenajme, že Johnova veta je určitým analógom Kuhn Tuckerovej vety. Platí bez akýchkoľvek podmienok regularity ale pripúšťa možnosť, že $\chi^0 = 0$. Na (3.2) budeme aplikovať Farkašovu lemu. Pripomeňme, že podľa nej

$$\exists \lambda \geq 0 : A^T \lambda = b \iff \forall_{\delta x} : A \delta x \leq 0 \Rightarrow b^T \delta x \leq 0.$$

Označme prvé dva sčítance v (3.2) ako vektor $-b$ a $A^T := \left(\frac{\partial \bar{s}(\hat{x})}{\partial x} \right)^T$. Potom (3.2) je podľa Farkašovej lemy ekvivalentná s výrazom

$$\forall_{\delta x} : \frac{\partial \bar{s}(\hat{x})}{\partial x} \delta x \leq 0 \Rightarrow \left[\chi^0 \frac{\partial f^0(\hat{x})}{\partial x} + \chi^T \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} \right] \delta x \leq 0,$$

čo nie je nič iné, ako (3.1). Z predpokladu regularity (PR) a z nenulovosti vektoru pozostávajúceho z konštánt $\chi^0, \chi_i, \lambda_i$ vyplýva, že vektor $(\chi^0, \chi) \neq 0$. Tým je veta dokázaná.

Poznámky:

1. Ak tvrdenie Vety 3.1 platí s nejakým vektorom (χ^0, χ) , potom platí aj s každým vektorom $c(\chi^0, \chi)$, kde $c > 0$. Z toho vyplýva, že ak (χ^0, χ) je taký, že $\chi^0 < 0$ (t.j. $\chi^0 \neq 0$), potom existuje aj taký (χ^0, χ) spĺňajúci tvrdenie vety, že $\chi^0 = -1$.

2. Ako uvidíme neskôr Veta 1 má praktický význam iba vtedy, keď vieme zaručiť, že $\chi^0 = -1$. Tento prípad nastáva, keď úloha spĺňa predpoklady regularity stanovené Kuhn Tuckerovou vetou. Tieto sú splnené, ak napr. s^i, f^i sú lineárne, resp. ak vektory $\frac{\partial s^i(\hat{x})}{\partial x}$, $i \in I(\hat{x})$, spolu s vektormi $\frac{\partial f^i(\hat{x})}{\partial x}$, $i = 1, \dots, \rho$ sú lineárne nezávislé.

3. V prípade, že naša úloha nemá žiadne ohraničenia typu rovnosti (čo odpovedá napr. prípadu $f \equiv 0$), podmienka regularity (PR), je zároveň podmienkou vyžadovanou K-T vetou a teda v tomto prípade je $\chi^0 = -1$.

4. V prípade, že úloha nemá ohraničenia typu nerovnosti, tak dostávame Lagrangeovu vetu.

5. Poznamenajme ďalej, že v prípade že máme vyriešenú otázku $\chi^0 = -1$, Veta 3.1 dáva formálne dostatok podmienok na určenie bodu $\hat{x}$.

3.1.4. Princíp maxima v NLP.

Podmienka z predchádzajúcej vety sa vo všeobecnosti dosť ťažko overuje. Nasledujúca veta umožní zameniť túto podmienku v špeciálnom prípade inou, ktorá sa používa ľahšie a najmä v teórii optimálneho riadenia má široké uplatnenie.

Veta 3.2. *Nech f^0, f, s, R, S sú ako vo Vete 3.1. Ďalej nech f je lineárna funkcia: $f(x) = Px + q$, S je konvexná množina a f^0 konvexná funkcia. Potom ak pre nejaké (χ^0, χ) a $\hat{x}$ platí (3.1), potom platí aj*

$$\chi^0 f^0(\hat{x}) + \chi^T f(\hat{x}) = \max_{x \in S} (\chi^0 f^0(x) + \chi^T f(x)) \quad (3.3)$$

K dôkazu budeme potrebovať nasledovné dve lemy.

Lema 3.1. *Nech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Potom f je konvexná vtedy a len vtedy ak pre ľubovoľné $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \hat{x}$ platí, že*

$$f(\hat{x}) + \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x}(x - \hat{x}) \leq f(x)$$

Táto lema je dobre známou vlastnosťou konvexných funkcií, jej dôkaz možno nájsť napríklad v knihe M. Hamala, Nelineárne programovanie, ALFA 72, str. 81.

Lemma 3.2. *Nech $S = \{x : s^i(x) \leq 0, i = 1, \dots, \sigma\}$, nech S je konvexná podmnožina $\mathbb{R}^n$ a nech $\hat{x}, x \in S$, $x \neq \hat{x}$. Potom $(x - \hat{x}) \in \delta S(\hat{x})$.*

Dôkaz: Dôkaz lemy je jednoduchý a čitateľ ho iste zvládne aj sám.

Dôkaz Vety 3.2. Sporom. Nech platí (3.1), t.j.

$$\left[\chi^0 \frac{\partial f^0(\hat{x})}{\partial x} + \chi^T P \right] \delta x \leq 0 \quad \forall \delta x \in \delta S(\hat{x}), \quad (3.4)$$

a nech by neplatila podmienka maxima, t.j. existovalo by $x \in S$ také, že

$$\begin{aligned} \chi^0 f^0(x) + \chi^T f(x) &> \chi^0 f^0(\hat{x}) + \chi^T f(\hat{x}), \text{ t.j.} \\ \chi^0 (f^0(x) - f^0(\hat{x})) + \chi^T P(x - \hat{x}) &> 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pretože $x, \hat{x} \in S$ a S je podľa predpokladov konvexná, z Lemy 3.2 vyplýva, že $(x - \hat{x}) \in \delta S(\hat{x})$ a zo vzťahu (3.4) dostávame

$$\chi^T P(x - \hat{x}) \leq -\chi^0 \frac{\partial f^0(\hat{x})}{\partial x}(x - \hat{x}). \quad (3.6)$$

Kombináciou vzťahov (3.5) a (3.6) dostávame

$$0 < \chi^0(f^0(x) - f^0(\hat{x})) + \chi^T P(x - \hat{x}) \leq \chi^0 \left((f^0(x) - f^0(\hat{x})) - \frac{\partial f^0(\hat{x})}{\partial x}(x - \hat{x}) \right). \quad (3.7)$$

Ak by $\chi^0 = 0$, tak z nerovnosti (3.7) dostávame spor ($0 < 0$). Ak by $\chi^0 < 0$, tak vykrátením χ^0 v (3.7) dostávame, že

$$f^0(x) - f^0(\hat{x}) - \frac{\partial f^0(\hat{x})}{\partial x}(x - \hat{x}) < 0,$$

čo je v spore s konvexnosťou f^0 - Lema 3.1. Tým je veta dokázaná.

Dôsledok 3.1. *Nech f^0, f, s, R, S sú ako vo Vete 3.2, nech je splnený predpoklad (PR) v bode $\hat{x} \in X$ a nech $f^0(\hat{x}) = \min_{x \in X} f^0(x)$. Potom existuje $\chi \neq 0$ také, že*

$$-f^0(\hat{x}) + \chi^T f(\hat{x}) = \max_{x \in X} (-f^0(x) + \chi^T f(x))$$

Dôkaz. Spojením Vety 3.1 a Vety 3.2 dostaneme podmienku maxima; skutočnosť, že $\chi^0 = -1$ dostaneme z toho, že ohraničenia typu rovnosti sú lineárne a typu nerovnosti spĺňajú (PR), čo dokopy dáva splnenie podmienky regularity pre Kuhn-Tuckerovu vetu.

3.2. Formulácia štandardnej diskkrétnej úlohy optimálneho riadenia

Daná je diferenčná rovnica systému

$$x_{i+1} = x_i + f_i(x_i, u_i), \quad i = 0, \dots, k-1, \quad (3.8)$$

kde $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n) \in \mathbb{R}^n$, $u_i = (u_i^1, \dots, u_i^m) \in \mathbb{R}^m$, $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, ohraničenia na riadenie

$$u_i \in U_i \subset \mathbb{R}^m, \quad U_i = \{u_i ; \quad p_i(u_i) \leq 0\}, \quad p_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m_i}, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad (3.9)$$

počiatočná podmienka

$$x_0 = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad (3.10)$$

a cieľová množina $C = \{x ; \quad g(x) = 0\}$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$, t.j. cieľová podmienka

$$g(x_k) = 0. \quad (3.11)$$

Ďalej je daná *účelová funkcia* (kritérium optimality)

$$J = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i). \quad (3.12)$$

Problém spočíva v tom, že spomedzi riadení $\mathcal{U}$, ktoré vyhovujú daným ohraňčeniam a ktorých odozva $\mathcal{X}(\hat{x}_0, \mathcal{U})$ spĺňa $x_k(\hat{x}_0, \mathcal{U}) \in C$, (t.j. spomedzi prípustných riadení) nájsť také riadenie $\hat{\mathcal{U}}$, že

$$J(\hat{\mathcal{U}}) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i(\hat{x}_0, \hat{\mathcal{U}}), \hat{u}_i)$$

je minimálne.

Predpoklad je, že f_i, f_i^0 a p_i, g sú C^1 .

Poznámky.

1. Niekedy je výhodné preformulovať úlohu do geometrického tvaru: Rozšírime priestor stavov na $\mathbb{R}^{n+1}$ pridaním nulte súradnice x^0 , označíme $\tilde{x} = (x^0, x)$ a v tomto rozšírenom stavovom priestore vyšetrujeme systém

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + \tilde{f}_i(x_i, u_i),$$

kde

$$\tilde{f}_i(x_i, u_i) = (f_i^0(x_i, u_i), f_i(x_i, u_i))$$

so počiatočným stavom $\hat{\tilde{x}} = (0, \hat{x}_0)$, cieľovou množinou $\tilde{C} = \mathbb{R} \times C = \{(x^0, x); \quad x^0 \in \mathbb{R}, \quad x \in C\}$. Pretože $x_k^0 = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i)$, možno túto úlohu ekvivalentne formulovať ako úlohu minimalizácie x_k^0 pri daných ohraňčeniach pre rozšírený systém.

2. Nie je nevyhnutné, aby funkcie f_i, f_i^0 atď. boli definované na celom priestore. Tento predpoklad urobíme len pre zjednodušenie formulácie, stačí aby f_i, f_i^0 atď. boli definované na nejakej dostatočne veľkej otvorenej oblasti.

3. Štandardná úloha je zúžením všeobecnej schémy vo viacerých smeroch. Po prvé sa požaduje, aby stav a vstupy boli prvkami euklidovských priestorov, teda aby mali kontinuálny charakter - to je pre tento prístup nevyhnutné. Tak isto sa nemožno celkom obísť bez určitých predpokladov o množinách U_i, P a C (U_i a C sú dané nerovnosťami). Ďalšie zúženie - že totiž P je jednobodová množina a nemáme stavové ohraňčenia - sa zaviedlo len pre zjednodušenie formulácie a výpočtov.

Štandardnú úlohu môžeme formulovať ako úlohu nelineárneho programovania: Nájsť minimum funkcie

$$P(z) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i),$$

kde $z = (u_0, \dots, u_{k-1}; x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{km+(k+1)n}$ na množine

$$z \in Z = \{z; \quad r_j(z) = 0, \quad j = 0, \dots, k+1, s_j(z) \leq 0, \quad j = 0, \dots, k-1\}$$

kde

$$\begin{aligned} r_0(z) &= x_0 = \hat{x}_0 \\ r_i(z) &= x_i - x_{i-1} - f_{i-1}(x_{i-1}, u_{i-1}), \quad i = 1, \dots, k \\ r_{k+1}(z) &= g(x_k) \\ s_i(z) &= p_i(u_i), \quad i = 0, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Týmto priamym spôsobom rozpisu však pre zúžení úlohu dostaneme úlohu nelineárneho programovania zbytočne vysokej dimenzie. Diferenčná rovnica nám totiž umožňuje ihneď vylúčiť premenné $x_0, \dots, x_k$, ktoré sú pri pevne danom $x_0 = \hat{x}_0$ jednoznačne dané hodnotami riadiacich premenných $u_0, \dots, u_{k-1}$. Môžeme teda úlohu sformulovať ako úlohu nelineárneho programovania v priestore $\mathbb{R}^{km}$ takto:

Nájsť minimum funkcie $J(\mathcal{U}) = J(u_0, \dots, u_{k-1})$ pri podmienke $\mathcal{U} \in X$, kde $X = \{\mathcal{U}; \quad p_i(u_i) \leq 0, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad g(x_k(\hat{x}_0, \mathcal{U})) = 0\}$.

3.3. Pseudoprincíp maxima

Aplikujme Vetu 3.1 na úlohu (3.8)-(3.12). Nech $\hat{\mathcal{U}} = \{\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{k-1}\}$ a $\hat{\mathcal{X}} = \{\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_k\} = \{x_0(\hat{x}_0, \hat{\mathcal{U}}), \dots, x_k(\hat{x}_0, \hat{\mathcal{U}})\}$ sú optimálne riadenie a jeho odozva. Nech pre každé $i = 0, \dots, k-1$ sú vektory $\frac{\partial p_i^j}{\partial u_i}(\hat{u}_i), j \in I(\hat{u}_i)$ lineárne nezávislé. Potom existuje nenulový vektor $\hat{\chi} = (\psi^0, \chi) = (\psi^0, \chi^1, \dots, \chi^l)$ taký, že platí $\psi^0 \leq 0$ a

$$\left[\psi^0 \frac{\partial J}{\partial \mathcal{U}}(\hat{\mathcal{U}}) + \chi^T \frac{\partial g}{\partial x_k}(\hat{x}_k) \frac{\partial x_k}{\partial \mathcal{U}}(\hat{x}_0, \hat{\mathcal{U}}) \right] \delta \mathcal{U} \leq 0, \quad \forall \delta \mathcal{U} \in \delta(U_0 \times \dots \times U_{k-1})(\hat{\mathcal{U}}).$$

Táto podmienka je ekvivalentná s podmienkami pre $i = 0, \dots, k-1$

$$\left[\psi^0 \frac{\partial J}{\partial u_i}(\hat{\mathcal{U}}) + \chi^T \frac{\partial g}{\partial x_k}(\hat{x}_k) \frac{\partial x_k}{\partial u_i}(\hat{x}_0, \hat{\mathcal{U}}) \right] \delta u_i \leq 0, \quad \forall \delta u_i \in \delta U_i(\hat{u}_i). \quad (3.13)$$

Ak $\mathcal{U} = \{u_0, \dots, u_{k-1}\}$, označíme $\mathcal{U}_i = \{u_i, \dots, u_{k-1}\}$ úsek riadenia na intervale $[i, k]$. Pod $\mathcal{U}_k$ budeme rozumieť prázdnu množinu. Pre každé i je hodnota odozvy $x_k(x_0, \mathcal{U})$ funkciou svojej hodnoty x_i v i -tom okamihu a úseku $\mathcal{U}_i$ riadenia; túto funkciu označme

$$x_{k,i}(x_i, \mathcal{U}_i) = x_k(x_0, \mathcal{U}), \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Pre $i = k$ definujme $x_{k,k} = x_k$. Zo vzťahu $x_{i+1} = x_i + f_i(x_i, u_i)$ vyplýva, že $x_{i+1} = x_{i+1}(x_i, u_i)$ a teda $x_{k,i}(x_i, \mathcal{U}_i) = x_{k,i+1}(x_{i+1}(x_i, u_i), \mathcal{U}_{i+1})$. Z toho vyplýva, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial u_i}(\hat{x}_0, \hat{\mathcal{U}}) &= \frac{\partial x_{k,i}}{\partial u_i}(\hat{x}_i, \hat{\mathcal{U}}_i) = \frac{\partial x_{k,i+1}}{\partial u_i}(\hat{x}_{i+1}(\hat{x}_i, \hat{u}_i), \hat{\mathcal{U}}_{i+1}) = \\ &= \frac{\partial x_{k,i+1}}{\partial x_{i+1}}(\hat{x}_{i+1}, \hat{\mathcal{U}}_{i+1}) \frac{\partial x_{i+1}}{\partial u_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) = \frac{\partial x_{k,i+1}}{\partial x_{i+1}}(\hat{x}_{i+1}, \hat{\mathcal{U}}_{i+1}) \frac{\partial f_i}{\partial u_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) \end{aligned} \quad (3.14)$$

kde $i = 0, \dots, k-1$.

Podobne platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{k,i}}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) &= \frac{\partial x_{k,i+1}}{\partial x_{i+1}}(\hat{x}_{i+1}, \hat{u}_{i+1}) \frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) = \\ &= \frac{\partial x_{k,i+1}}{\partial x_{i+1}}(\hat{x}_{i+1}, \hat{u}_{i+1}) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) + E \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

pričom $i = 1, \dots, k-1$. Pre $i = k$ zrejme $\frac{\partial x_{k,k}}{\partial x_k} = E$.

Definujme $J_k = 0$ a pre $i = 0, \dots, k-1$ označme $J_i(x_i, \mathcal{U}_i) = \sum_{j=i}^{k-1} f_j^0(x_j, u_j)$, kde $\{x_j\}$ je odozva na riadenie $\mathcal{U}_i$ a počiatocnú podmienku x_i na intervale $[i, k]$. Zrejme $J_i(x_i, \mathcal{U}_i) = f_i^0(x_i, u_i) + J_{i+1}(x_{i+1}(x_i, u_i), \mathcal{U}_{i+1})$. Pretože $f_j^0(x_j, u_j)$ nezávisia od u_i pre $j < i$, platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_i}(\hat{u}) &= \frac{\partial J_i}{\partial u_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) = \frac{\partial f_i^0}{\partial u_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) + \frac{\partial J_{i+1}}{\partial u_i}(\hat{x}_i + f_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i), \hat{u}_{i+1}) = \\ &= \frac{\partial f_i^0}{\partial u_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) + \frac{\partial J_{i+1}}{\partial x_{i+1}}(\hat{x}_{i+1}, \hat{u}_{i+1}) \frac{\partial f_i}{\partial u_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i), \end{aligned} \quad (3.16)$$

kde $i = 0, \dots, k-1$.

Podobne platí

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) = \frac{\partial J_{i+1}}{\partial x_{i+1}}(\hat{x}_{i+1}, \hat{u}_{i+1}) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) + E \right) + \frac{\partial f_i^0}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) \quad (3.17)$$

kde $i = 1, \dots, k-1$. Zrejme $\frac{\partial J_k}{\partial x_k} = 0$.

Dosadíme vzťahy (3.14) a (3.16) do (3.13). Dostaneme (pre lepšiu prehľadnosť vynecháme argumenty funkcií):

$$\begin{aligned} \left[\psi^0 \left(\frac{\partial f_i^0}{\partial u_i} + \frac{\partial J_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) + \chi^T \frac{\partial g}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_{k,i+1}}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) \right] \delta u_i &\leq 0, \quad \forall \quad \delta u_i \in \delta U_i(\hat{u}_i) \\ \left[\psi^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial u_i} + \left(\psi^0 \frac{\partial J_{i+1}}{\partial x_{i+1}} + \chi^T \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial x_{k,i+1}}{\partial x_{i+1}} \right) \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right] \delta u_i &\leq 0, \quad \forall \quad \delta u_i \in \delta U_i(\hat{u}_i) \end{aligned}$$

Ak označíme

$$\psi_{i+1}^T = \psi^0 \frac{\partial J_{i+1}}{\partial x_{i+1}} + \chi^T \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial x_{k,i+1}}{\partial x_{i+1}}, \quad i = 0, \dots, k-1,$$

dostaneme

$$\boxed{\left[\psi^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial u_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) + \psi_{i+1}^T \frac{\partial f_i}{\partial u_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) \right] \delta u_i \leq 0, \quad \forall \quad \delta u_i \in \delta U_i(\hat{u}_i)}. \quad (3.18)$$

Zrejme

$$\psi_i^T = \psi^0 \frac{\partial J_i}{\partial x_i} + \chi^T \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial x_{k,i}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.19)$$

Pretože $\frac{\partial x_{k,k}}{\partial x_k} = E$ a $\frac{\partial J_k}{\partial x_k} = 0$ dostávame zo (3.14) pre $i = k$

$$\boxed{\psi_k = \left(\frac{\partial g}{\partial x_k}(\hat{x}_k) \right)^T \chi}. \quad (3.20)$$

Keď dosadíme vzťahy (3.15) a (3.17) do (3.19), dostaneme

$$\begin{aligned} \psi_i^T &= \psi^0 \left(\frac{\partial J_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + E \right) + \frac{\partial f_i^0}{\partial x_i} \right) + \chi^T \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial x_{k,i+1}}{\partial x_{i+1}} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + E \right) = \\ &= \psi^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial x_i} + \left(\psi^0 \frac{\partial J_{i+1}}{\partial x_{i+1}} + \chi^T \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial x_{k,i+1}}{\partial x_{i+1}} \right) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + E \right) = \psi^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial x_i} + \psi_{i+1}^T \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + E \right), \quad i = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Dostávame teda, že n -rozmerný vektor ψ_i vyhovuje "spätnej" diferenčnej rovnici

$$\boxed{\psi_i = \psi_{i+1} + \left(\frac{\partial f_i^0}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) \right)^T \psi^0 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i) \right)^T \psi_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, k-1 \quad (3.21)$$

s podmienkou na konci (3.20).

Diferenčnú rovnicu (3.21) nazývame *adjungovanou rovnicou* k rovnici (3.8) a vzťah (3.20) *podmienkou transverzality*.

Výsledkom našich úvah je tvrdenie.

Veta 3.3. Pseudoprincíp maxima. *Nech $\hat{\mathcal{U}} = \{\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{k-1}\}$ je optimálne riadenie pre ŠÚOR, nech $\hat{\mathcal{X}} = \{\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_k\}$ je jeho odozva. Nech pre každé $i = 0, \dots, k-1$ sú vektory $\frac{\partial p_i^j}{\partial u_i}(\hat{u}_i), j \in I(\hat{u}_i)$ lineárne nezávislé. Potom existuje vektor $(\psi^0, \chi) \neq 0$, $\psi^0 \leq 0$, $\chi \in \mathbb{R}^l$ taký, že riešenie $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ adjungovanej rovnice (3.21) a podmienky transverzality (3.20), spolu s $\hat{\mathcal{U}}$ a $\hat{\mathcal{X}}$ spĺňajú pre každé $i = 0, \dots, k-1$ podmienku (3.18)*

Poznámky

1. Niekedy sa podmienky Vety 3.3. formulujú pomocou tzv. *Hamiltonovej funkcie*, ktorá je pre $i = 0, \dots, k-1$ definovaná predpisom

$$H_i(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 f_i^0(x, u) + \psi^T f_i(x, u). \quad (3.22)$$

Potom možno podmienku (3.18) zapísať v tvare

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i, \psi^0, \psi_{i+1}) \delta u_i \leq 0, \quad \forall \delta u_i \in \delta U_i(\hat{u}_i), \quad (3.18')$$

adjungovanú rovnicu (3.21) v tvare

$$\psi_i = \psi_{i+1} + \frac{\partial H_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{u}_i, \psi^0, \psi_{i+1})^T \quad (3.21')$$

a stavovú rovnicu (3.8) v tvare

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\partial H_i}{\partial \psi_{i+1}}(\hat{x}_i, \hat{u}_i, \psi^0, \psi_{i+1})^T. \quad (3.8')$$

2. Pseudoprincíp maxima je len nutnou podmienkou optimality. Principiálne ho však možno použiť na hľadanie optimálneho riadenia, lebo formálne poskytuje dostatok podmienok na jeho určenie. (Túto vlastosť mala už Veta 3.1, z ktorej sme podmienky odvodili.) Veta 3.3 je len nutnou podmienkou optimality a teda jej podmienky môžu spĺňať aj riadenia, ktoré nie sú optimálne. V prípade, že podmienkam vety vyhovuje jediné riadenie $\hat{U}$ a pritom vieme z iných dôvodov, že optimálne riadenie existovať musí, potom $\hat{U}$ je optimálne riadenie.

3. Vzhľadom na to, že adjungovaná rovnica (3.21) je homogénna, má spolu s riešením (ψ^0, ψ_i) , $i = 1, \dots, k-1$ aj riešenie $c(\psi^0, \psi_i)$, pre každé $c \in \mathbb{R}$. Veta 3.1, pomocou ktorej sme odvodili Vetu 3.3. a z ktorej pochádza vektor $(\psi^0, \chi) \neq 0$, $\psi^0 \leq 0$ mala zase vlastnosť, že ak platila pre nejaké (ψ^0, χ) , potom platila aj pre $c(\psi^0, \chi)$, $c > 0$. Pretože H_i je lineárna v (ψ^0, ψ_i) , t.j.

$$H_i(x, u, c\psi^0, c\psi) = cH_i(x, u, \psi^0, \psi), \quad i = 0, \dots, k-1$$

tak ak v podmienke (3.18) nahradíme (ψ^0, ψ_{i+1}) vektorom $c(\psi^0, \psi_{i+1})$, $c > 0$, dostaneme ekvivalentnú podmienku. Z toho vyplýva, že ak vieme, že $\psi^0 \neq 0$ čo sa často dá v konkrétnych prípadoch ukázať, tak môžeme položiť $\psi^0 = -1$. Ako ukážeme v ďalšom, iba takto je podmienka (3.18) užitočná pre určovanie optimálnych riešení.

4. V niektorých prípadoch vieme už z tvaru funkcií f_i , g_i , p_i usúdiť, že $\psi^0 = -1$. Je to v prípade, že nastáva kombinácia niektorých podmienok z 1. a 2. skupiny.

1. *Podmienky pre p_i :*

- (a) podmienka regularity (PR)
- (b) p_i^j sú lineárne

2. *Podmienky pre f_i , g_i :*

- (a) úloha je s voľným koncom, t.j. nemáme g_i
- (b) g_i lineárne, f_i lineárne v x aj u (vtedy zložené ohraničenie typu rovnosti $g_i(x_k(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}))$ je lineárne v riadení -dokázať na DÚ - návod: ak $x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$, potom $x_{i+1} = A^{i+1}x_0 + \sum_{s=0}^i A^{i-s}Bu_s$).

5. V spojitý teórii, ktorá sa študovala prv, platí za veľmi všeobecných predpokladov Pontrjaginov princíp maxima, ktorého diskretná verzia sa od Vety 3.3. líši tým, že podmienka nerovnosti (3.18) sa nahradí podmienkou maxima

$$\boxed{\psi^0 f_i^0(\hat{x}_i, \hat{u}_i) + \psi_{i+1}^T f_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i) = \max_{u_i \in U_i} (\psi^0 f_i^0(\hat{x}_i, u_i) + \psi_{i+1}^T f_i(\hat{x}_i, u_i))}. \quad (3.23)$$

Táto podmienka sa používa omnoho pohodlnejšie ako (3.18). Spočiatku sa viacerí autori domnievali, že (3.23) platí aj v diskretnom prípade pri úplne všeobecných predpokladoch. Až neskôr sa ukázalo, že podmienka (3.23) platí len pri ďalších predpokladoch, ako uvidíme v ďalšej časti.

6. Ak U_i sú kompaktné a ak existuje aspoň jedno prípustné riadenie, potom existuje aj optimálne riadenie. (Návod: Spojitá funkcia na kompaktnej množine dosahuje svoje minimum).

3.4. Princíp maxima

Veta 3.4. *Nech štandardná úloha spĺňa navyše nasledovné predpoklady*

- (a) *funkcie f_i sú lineárne v u , t.j. $f_i(x, u) = c_i(x) + d_i(x)u$*
- (b) *funkcie f_i^0 sú konvexné v u*
- (c) *množiny U_i sú konvexné.*

Nech $\hat{U} = \{\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{k-1}\}$ a $\hat{\mathcal{X}} = \{\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_k\}$ sú optimálne riadenie a optimálna odozva. Nech je splnená podmienka regularity (PR).

Potom existuje $(\psi^0, \chi) \neq 0$, $\psi^0 \leq 0$, také, že $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ riešenie adjungovanej rovnice (3.21) a podmienky transversality (3.20) spolu s $\hat{U}$ a $\hat{\mathcal{X}}$ spĺňajú podmienku maxima (3.23).

Dôkaz. Podľa Vety 3.3 existuje $(\psi^0, \chi) \neq 0$, $\psi^0 \leq 0$, také, že $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ riešenie adjungovanej rovnice (3.21) a podmienky transversality (3.20) spolu s $\hat{U}$ a $\hat{\mathcal{X}}$ spĺňajú podmienku (3.18). Tvrdenie vety teraz dostaneme aplikovaním Vety 3.2 na podmienku (3.18) pri pevne zvolenom x_i .

3.5. Riešenie úloh

Nasledujúca úloha ukazuje, že princíp maxima vo všeobecnosti neplatí. Zároveň si na ňom ukážeme použitie pseudoprincípu maxima.

Príklad 1. Riešte nasledovnú diskretnú úlohu optimálneho riadenia

$$x_{i+1} = u_i, \quad i = 0, \dots, k-1$$

$$x_0 = 0, \quad u_i \in [-1, 1]$$

$$\min J = \sum_{i=0}^{k-1} (2x_i^2 - u_i^2).$$

Riešenie: Zrejme $f_i = u_i - x_i$ je lineárna, $U_i = [-1, 1]$ je konvexná ale funkcia $f_i^0 = 2x_i^2 - u_i^2$ nie je konvexná v premennej u . Preto musíme použiť pseudoprincíp maxima.

Pretože úloha je s volným koncom a lineárne ohraničenia definujúce množiny U_i splňajú (PR), tak $\psi^0 = -1$. Adjungovaná rovnica má tvar

$$\psi_i = -4\hat{x}_i, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

podmienka transversality je

$$\psi_k = 0,$$

podmienka nerovnosti

$$[2\hat{u}_i + \psi_{i+1}]\delta u_i \leq 0, \quad \forall \delta u_i \in \delta U_i(\hat{u}_i), \quad i = 0, \dots, k-1. \quad (3.24)$$

Všimnime si, že ak $u_i \in (-1, 1)$, tak $\delta U_i(u_i) = (-\infty, \infty)$; ak $u_i = 1$, tak $\delta U_i(u_i) = (-\infty, 0]$; ak $u_i = -1$, tak $\delta U_i(u_i) = [0, \infty)$. Pre $i = k-1$ podmienka (3.24) dáva

$$u_{k-1}\delta u_i \leq 0. \quad (3.25)$$

(a) V prípade, že $\hat{u}_{k-1} \in (-1, 1)$, podmienka (3.25) by mala platiť pre každé δu_{k-1} . Ovšem, v prípade, že $\hat{u}_{k-1} \in (-1, 0)$, podmienka (3.25) neplatí pre $\delta u_{k-1} < 0$, v prípade, že $\hat{u}_{k-1} \in (0, 1)$, podmienka (3.25) neplatí pre $\delta u_{k-1} > 0$. Iba v prípade, že $\hat{u}_{k-1} = 0$, podmienka (3.25) platí pre každé δu_{k-1} .

(b) V prípade, že $\hat{u}_{k-1} = 1$, podmienka (3.25) má platiť pre každé $\delta u_{k-1} \leq 0$, a aj skutočne platí.

(c) V prípade, že $\hat{u}_{k-1} = -1$, podmienka (3.25) má platiť pre každé $\delta u_{k-1} \geq 0$, a tiež platí.

V prípade $i = k-1$ teda môžu nastať tri prípady

$$\hat{u}_{k-1} = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Vyšetříme teraz prípady $i = 0, \dots, k-2$. Dosadíme adjungovanú rovnicu do podmienky (3.24). Dostaneme

$$[2u_i - 4x_{i+1}]\delta u_i \leq 0. \quad (3.26)$$

Dosadíme stavovú rovnicu do (3.26)

$$[2u_i - 4u_i]\delta u_i = -2u_i\delta u_i \leq 0, \quad \text{t.j.}$$

$$2u_i\delta u_i \geq 0. \quad (3.27)$$

Analyzujeme teraz jednotlivé možnosti.

Ak $\hat{u}_i = 1$, $\delta u_i \leq 0$, tak (3.27) neplatí.

Ak $\hat{u}_i = -1$, $\delta u_i \geq 0$, tak (3.27) neplatí.

Ak $\hat{u}_i \in (-1, 0)$, δu_i je ľubovoľné, tak (3.27) neplatí pre δu_i kladné.

Ak $\hat{u}_i \in (0, 1)$, δu_i je ľubovoľné, tak (3.27) neplatí pre δu_i záporné.

Ak $\hat{u}_i = 0$, δu_i je ľubovoľné, tak (3.27) platí.

Teda v prípade $i = 0, \dots, k-2$ je $\hat{u}_i = 0$.

Celkovo sme dostali troch kandidátov na optimálne riadenie

$$\mathcal{U}_1 = \{0, 0, \dots, 0, -1\}, \quad \mathcal{X}_1 = \{0, 0, \dots, 0, -1\}, \quad J = -1,$$

$$\mathcal{U}_2 = \{0, 0, \dots, 0, 1\}, \quad \mathcal{X}_2 = \{0, 0, \dots, 0, 1\}, \quad J = -1,$$

$$\mathcal{U}_3 = \{0, 0, \dots, 0, 0\}, \quad \mathcal{X}_3 = \{0, 0, \dots, 0, 0\}, \quad J = 0.$$

Podľa Poznámky 6 z odseku 3.3 existuje optimálne riadenie pre túto úlohu a teda musí byť medzi kandidátmi, ktoré sme práve získali. Porovnaním príslušných hodnôt účelových funkcií dostávame, že optimálne sú prvé dva riadenia.

Čo by sme dostali aplikovaním podmienky maxima na túto úlohu? Podmienka maxima má tvar

$$-(2x_i^2 - u_i^2) + \psi_{i+1}(u_i - x_i) \rightarrow \max_{u_i \in [-1, 1]},$$

respektíve

$$u_i^2 + \psi_{i+1}u_i \rightarrow \max_{u_i \in [-1, 1]},$$

t.j. hľadáme maximum konvexnej funkcie. To môže byť iba na hranici, t.j. z princípu maxima dostávame, že $u_i = \pm 1$ a teda optimálne riadenia nespĺňajú podmienku maxima.

Príklad 2. Riešte úlohu o optimálnej spotrebe

$$x_{i+1} = x_i + rx_i - u_i, \quad i = 0, \dots, k-1$$

$$x_0 = a, \quad x_k = b$$

$$\max J = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{1+\delta} \right)^i \ln u_i$$

Riešenie: Pretože nemáme ohraničenia na riadenie a rovnica diferenčného systému je lineárna, tak možno položiť $\psi^0 = -1$. Pretože navyše $f_i^0 = -\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^i \ln u_i$ je konvexná, možno použiť princíp maxima. Adjungovaná rovnica má tvar

$$\psi_i = (1+r)\psi_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

pričom ψ_k je voľné, lebo úloha má pevný koniec. Podmienka maxima má tvar

$$\left(\frac{1}{1+\delta} \right)^i \ln u_i + \psi_{i+1}(rx_i - u_i) \rightarrow \max_{u_i}, \quad i = 0, \dots, k-1$$

t.j., hľadáme voľné maximum konkávnej funkcie. Táto úloha je ekvivalentná s úlohou

$$\left(\frac{1}{1+\delta} \right)^i \frac{1}{u_i} - \psi_{i+1} = 0$$

ktorej riešením je

$$\psi_{i+1} = \left(\frac{1}{1+\delta} \right)^i \frac{1}{u_i} \quad (3.28)$$

Z adjungovanej rovnice dostávame

$$\psi_{i+1} = \left(\frac{1}{1+r} \right)^i \psi_1 \quad (3.29)$$

Po dosadení (3.29) do (3.28)

$$\left(\frac{1}{1+r} \right)^i \psi_1 = \left(\frac{1}{1+\delta} \right)^i \frac{1}{u_i}$$

z čoho po úprave dostávame

$$u_i = \left(\frac{1+r}{1+\delta} \right)^i \frac{1}{\psi_1}. \quad (3.30)$$

Zo vzťahu (3.30) vidieť, že u_i rastie s i , ak $\delta < r$, klesá, ak $\delta > r$, a je konštantné, ak $\delta = r$.

Využívajúc počiatočnú a koncovú podmienku pre x , vieme vypočítať ψ_1 a tým aj celé optimálne riadenie a jeho odozvu:

$$x_{i+1} = (1+r)x_i - u_i = (1+r)x_i - \left(\frac{1+r}{1+\delta} \right)^i \frac{1}{\psi_1} \quad (3.31)$$

Pretože pre riešenia lineárnych rovníc tvaru

$$x_{i+1} = Ax_i + B_i u_i$$

platí nasledovný vzorec

$$x_{i+1} = A^{i+1}x_0 + \sum_{s=0}^i A^{i-s} B_s u_s$$

dostávame pre riešenie rovnice (3.31)

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (1+r)^{i+1}x_0 - \sum_{s=0}^i (1+r)^{i-s} \left(\frac{1+r}{1+\delta} \right)^s \frac{1}{\psi_1} \\ &= (1+r)^{i+1}x_0 - (1+r)^i \left(\sum_{s=0}^i (1+r)^{i-s} \left(\frac{1}{1+\delta} \right)^s \right) \frac{1}{\psi_1} \end{aligned}$$

Ak $\delta = 0$, tak

$$x_{i+1} = (1+r)^{i+1}x_0 - (i+1)(1+r)^i \frac{1}{\psi_1}$$

ak $\delta > 0$, tak

$$x_{i+1} = (1+r)^{i+1}x_0 - (1+r)^i \frac{(1+\delta)^i - 1}{\delta(1+\delta)^{i-1}} \frac{1}{\psi_1}.$$

Máme dve neznáme x_0 a $\frac{1}{\psi_1}$ ale aj dve podmienky $x_0 = a$ a $x_k = b$, z ktorých neznáme môžeme vypočítať.

Dostaneme tak jediného kandidáta na optimálne riadenie. Dôkaz, že úloha má optimálne riadenie je v tomto prípade zložitejší, vyplýva z určitej konkávnosti úlohy. (Dá sa totiž dokázať, že princíp maxima je pri predpokladoch Vety 3.4 nielen nutnou, ale aj postačujúcou podmienkou optimality).

Príklad 3. Výrobok môžu vyrábať dve odvetvia A a B . Každá koruna investovaná v odvetví A (B) prinesie na konci každého nasledujúceho roku 2 (1)kg výrobku a 0,5 (0,9) Sk zisku. Pri danom počiatočnom stave finančných prostriedkov $\hat{x}_0^1$ ($\hat{x}_0^2$) investovaných do $A(B)$ a voľných finančných prostriedkov $\hat{x}_0^3$ treba určiť, ako na konci jednotlivých rokov rozdeliť voľné finančné prostriedky (tvorené ziskom), aby celková produkcia za 5 rokov bola maximálna.

Riešenie: Zavedieme nasledovné označenia: x_i^1 - súhrn prostriedkov investovaných do A až do konca i -teho roku; x_i^2 - súhrn prostriedkov investovaných do B až do konca i -teho roku; x_i^3 - finančné prostriedky k dispozícii na konci i -teho roku; u_i - pomerná časť voľných finančných prostriedkov, ktorá sa v i -tom roku investuje do A .

Potom dostávame nasledovnú trojrozmernú úlohu optimálneho riadenia danú diferenčnou rovnicou

$$\begin{aligned} x_{i+1}^1 &= x_i^1 + u_i x_i^3, \quad i = 0, \dots, 4 \\ x_{i+1}^2 &= x_i^2 + (1 - u_i) x_i^3, \\ x_{i+1}^3 &= 0,5 x_{i+1}^1 + 0,9 x_{i+1}^2 \\ &= 0,5(x_i^1 + u_i x_i^3) + 0,9(x_i^2 + (1 - u_i) x_i^3) \\ &= x_i^3 + 0,5 x_i^1 + 0,9 x_i^2 - 0,1 x_i^4 - 0,4 u_i^3, \end{aligned}$$

počiatočnou podmienkou

$$x_0^1 = \hat{x}_0^1, \quad x_0^2 = \hat{x}_0^2, \quad x_0^3 = \hat{x}_0^3,$$

cieľovou množinou $C = R^3$, ohraničeniami na riadenie

$$0 \leq u_i \leq 1, \quad i = 0, \dots, 4,$$

a účelovou funkciou v tvare

$$\max J = \sum_{i=1}^5 (2x_i^1 + x_i^2) = \sum_{i=0}^4 (2(x_i^1 + u_i x_i^3) + x_i^2 + (1 - u_i) x_i^3) = \sum_{i=0}^4 (2x_i^1 + x_i^2 + x_i^3 + u_i x_i^3).$$

Pre danú úlohu dostaneme adjungovanú rovnicu v tvare

$$\begin{aligned}\psi_i^1 &= \psi_{i+1}^1 - 2\psi^0 + 0, 5\psi_{1+1}^3, \\ \psi_i^2 &= \psi_{i+1}^2 - \psi^0 + 0, 9\psi_{1+1}^3, \\ \psi_i^3 &= \psi_{i+1}^3 - \psi^0(1 + u_i) + \psi_{i+1}^1 u_i + \psi_{i+1}^2(1 - u_i) + (-0, 1 - 0, 4u_i)\psi_{1+1}^3, \quad 1, \dots, 4,\end{aligned}$$

a podmienku transversality

$$\psi_5 = 0.$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade môžeme položiť $\psi^0 = -1$. Pretože sú splnené podmienky lineárnosti a konvexnosti, platí podmienka maxima, ktorá má v našom prípade tvar:

$$(1 + \psi_{1+1}^1 - \psi_{1+1}^2 - 0, 4\psi_{i+1}^3)\hat{x}_i^3 \hat{u}_i = \max_{0 \leq u_i \leq 1} (1 + \psi_{1+1}^1 - \psi_{1+1}^2 - 0, 4\psi_{i+1}^3)\hat{x}_i^3 u_i$$

Pretože v našom prípade je vždy $\hat{x}_i^3 > 0$, riešením podmienky maxima dostávame

$$\hat{u}_i = \begin{cases} 1, & \text{ak } \psi_{i+1}^2 + 0, 4\psi_{i+1}^3 - \psi_{i+1}^1 < 1 \\ 0, & \text{ak } \psi_{i+1}^2 + 0, 4\psi_{i+1}^3 - \psi_{i+1}^1 > 1 \\ \text{neurčené,} & \text{ak } \psi_{i+1}^2 + 0, 4\psi_{i+1}^3 - \psi_{i+1}^1 = 1 \end{cases}$$

Toto riešenie spolu s adjungovanou rovnicou a podmienkou transversality nám umožnia postupne počítať ψ_i a u_i , pre $i = 4, 3, 2, 1, 0$ a potom zo stavových rovníc vypočítame x_i , $i = 1, \dots, 5$.

Nech $\hat{x}_0^1 = 1$, $\hat{x}_0^2 = 0$, $\hat{x}_0^3 = 0$. Pretože $\psi^0 = -1$, tak z adjungovanej rovnice dostávame

$$\begin{aligned}\psi_i^1 &= \psi_{i+1}^1 - 2\psi^0 + 0, 5\psi_{1+1}^3, \\ \psi_i^2 &= \psi_{i+1}^2 - \psi^0 + 0, 9\psi_{1+1}^3, \\ \psi_i^3 &= \begin{cases} 0, 5\psi_{i+1}^3 + 2 + \psi_{i+1}^1, & \text{ak } \psi_{i+1}^2 + 0, 4\psi_{i+1}^3 - \psi_{i+1}^1 < 1 \\ 0, 9\psi_{i+1}^3 + 1 + \psi_{i+1}^2, & \text{ak } \psi_{i+1}^2 + 0, 4\psi_{i+1}^3 - \psi_{i+1}^1 > 1 \end{cases}.\end{aligned}$$

Riešením tohoto diferenčného systému od konca pri podmienke $\psi_5 = 0$ dostávame

i	5	4	3	2	1
.....					
ψ_i^1	0	2	5	9, 5	16, 25
ψ_i^2	0	1	3, 8	9, 3	18, 85
ψ_i^3	0	2	5	9, 5	18, 85
$\psi_{i+1}^2 + 0, 4\psi_{i+1}^3 - \psi_{i+1}^1$	0	-0, 2	0, 8	3, 6	10, 14
u_{i-1}	1	1	1	0	0

Optimálnu odozvu dostaneme postupným výpočtom zo stavovej rovnice pri počiatočnej podmienke $\hat{x}_0 = (, , 1)^T$ a podmienkach $\hat{u}_0 = \hat{u}_1 = 0$, $\hat{u}_2 = \hat{u}_3 = \hat{u}_4 = 1$.

i	0	1	2	3	4	5
$\dots\dots\dots$						
$\hat{x}_i^1$	0	0	1,71	4,275	8,1125	
$\hat{x}_i^2$	0	1	1,9	1,9	1,9	1,9
$\hat{x}_i^3$	1	0,9	1,71	2,565	3,8475	5,77125

Opäť sme dostali jediného kandidáta na optimálne riešenie a pretože optimálne riadenie pre túto úlohu existuje (pozri Poznámka 6, odsek 3.3), nájdené riadenie je skutočne optimálne.

3.6. Lineárna úloha optimálneho riadenia

Takto nazývame úlohu, v ktorej rovnica systému, ohraničenia i účelová funkcia sú lineárne. Rovnica systému je

$$x_{i+1} = x_i + A_i x_i + B_i u_i$$

kde A_i , B_i sú matice typu $n \times n$, resp. $n \times m$,

$$f_i^0 = c_i^T x_i + d_i^T u_i,$$

$$U_i = \{u : F_i u \leq w_i\}$$

$$C = \{x : Gx = h\},$$

pričom F_i , G sú matice a c_i , d_i , w_i , h sú vektory odpovedajúcich rozmerov ($i=0, \dots, k-1$). Pretože všetko je lineárne, jednak možno použiť Vetu 4, jednak sú splnené podmienky, za ktorých je $\psi^0 = -1$ a $\chi \neq 0$. Adjungovaný systém rovníc nezávisí od x_i ani u_i

$$\psi_i - \psi_{i+1} = A_i^T \psi_{i+1} - c_i, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Podmienkou transversality je

$$\psi_k = G^T \chi.$$

Hamiltonián

$$H_i = -c_i^T x - d_i^T u + \psi_{i+1}^T (A_i x_i + B_i u_i),$$

a podmienka maxima

$$-d_i^T \hat{u}_i + \psi_{i+1} B_i \hat{u}_i = \max_{u_i \in U_i} (-d_i^T u_i + \psi_{i+1}^T B_i u_i), \quad i = 0, \dots, k-1 \quad (3.32)$$

Predpokladajme špeciálne

$$U_i = \{u : \alpha_i^j \leq u_i^j \leq \beta_i^j, \quad j = 1, \dots, m\},$$

to znamená

$$U_i = U_i^1 \times \dots \times U_i^m, \text{ kde } U_i^j = [\alpha_i^j, \beta_i^j]. \quad (3.33)$$

Potom sa podmienka (3.32) rozpadne na m podmienok

$$[-d_i^j + (\psi_{i+1} B_i)^j] u_i^j \rightarrow \max_{u_i^j \in U_i^j},$$

z čoho vyplýva

$$\hat{u}_i^j = \begin{cases} \alpha_i^j, & \text{ak } -d_i^j + \psi_{i+1}^T B_i^j < 0 \\ \beta_i^j, & \text{ak } -d_i^j + \psi_{i+1}^T B_i^j > 0 \\ \text{neurčené,} & \text{ak } -d_i^j + \psi_{i+1}^T B_i^j = 0, \end{cases}$$

kde B_i^j je j -ty stĺpec matice B_i , $j = 1, \dots, m$, $i = 0, \dots, k-1$.

Dostali sme tak zaujímavý výsledok kvalitatívneho charakteru: až na výnimočný prípad $-d_i^j + \psi_{i+1}^T B_i^j = 0$, $\hat{u}_i$ musí nadobúdať extrémne hodnoty.

3.7. Lineárno-kvadratický regulátor

Rovnicu systému a ohraničenia predpokladáme lineárne ako v predchádzajúcej časti ale položíme

$$f_i^0(x_i, u_i) = \frac{1}{2}(x_i^T Q_i x_i + u_i^T R_i u_i),$$

kde Q_i , R_i sú symetrické matice, $Q_i \geq 0$, $R_i > 0$. Adjungovaná rovnica sa zmení takto

$$\psi_i - \psi_{i+1} = A_i^T \psi_{i+1} + \psi^0 Q_i \hat{x}_i$$

a podmienka maxima nadobudne tvar

$$\frac{1}{2} \psi^0 \hat{u}_i^T R_i \hat{u}_i + \psi_{i+1}^T B_i \hat{u}_i = \max_{u_i \in U_i} \left[\frac{1}{2} \psi^0 u_i^T R_i u_i + \psi_{i+1}^T B_i u_i \right] \quad (3.34)$$

Ak cieľová množina je celý priestor, tak $\psi^0 < 0$ a teda môžeme položiť $\psi^0 = -1$. Ak ďalej zvolíme špeciálne U_i ako v predchádzajúcej časti a $R_i = E$, potom sa dá podmienka (3.34) upraviť na podmienky

$$-\frac{1}{2}(u_i^j)^2 + \psi_{i+1}^T B_i^j u_i^j \rightarrow \max_{u_i^j \in [\alpha_i^j, \beta_i^j]}, \quad j = 1, \dots, m$$

z čoho vyplýva

$$\hat{u}_i^j = \begin{cases} \alpha_i^j, & \text{ak } \alpha_i^j > \psi_{i+1}^T B_i^j \\ \psi_{i+1}^T B_i^j, & \text{ak } \alpha_i^j \leq \psi_{i+1}^T B_i^j \leq \beta_i^j \\ \beta_i^j, & \text{ak } \beta_i^j < \psi_{i+1}^T B_i^j \end{cases}$$

Opäť sme dostali kvalitatívne zaujímavý výsledok: $\hat{u}_i^j$ je rovné tej hodnote z intervalu $[\alpha_i^j, \beta_i^j]$, ktorá je najbližšie hodnote $\psi_{i+1}^T B_i^j$.

4. Teória riadenia

V predchádzajúcich kapitolách sme hovorili o optimálnych riadeniach. Sformulovali a dokázali sme nutné a postačujúce podmienky v tvare rovnice dynamického programovania, ktoré umožnili vypočítať optimálne riadenia, sformulovali sme nutné podmienky optimality v tvare pseudoprincípu maxima, dotkli sme sa otázky existencie optimálnych riadení. Podotýkame, že otázku existencie optimálneho riadenia má zmysel klásť až po vyriešení otázky riaditeľnosti, to znamená, po zodpovedaní otázky, či vôbec existuje nejaké prípustné riadenie. Otázkami riaditeľnosti ale aj napr. otázkami stabilizovateľnosti systémov s riadením sa zaoberá teória riadenia. V nasledujúcich odsekoch sa zoznámime s niektorými základnými výsledkami riaditeľnosti diskrétnych systémov. Podotýkame, že podobné výsledky sa dajú dosiahnuť aj pre spojité úlohy.

4.1. Dosiahnuteľná množina

Uvažujme diskrétny systém s riadením daný diferenčnou rovnicou

$$x_{i+1} = f_i(x_i, u_i), \quad i = 0, \dots, k-1 \quad (4.1)$$

spolu s počiatočnou podmienkou

$$x_0 = \hat{x}_0 \quad (4.2)$$

a predpokladajme, že riadenia spĺňajú podmienku

$$u_i \in U_i. \quad (4.3)$$

Nech $\mathcal{U} = \{u_0, \dots, u_{k-1}\}$ je riadenie a nech $\mathcal{X} = \{x_0, \dots, x_k\}$, kde $x_0 = \hat{x}_0$, je jeho odozva. Potom hovoríme, že riadenie $\mathcal{U}$ prevádza systém (4.1) z bodu $\hat{x}_0$ do bodu x_k na intervale $[0, k]$.

Pod *dosiahnuteľnou množinou* $\Omega(\hat{x}_0, k)$ prislúchajúcou k systému (4.1) a k podmienkam (4.2) a (4.3) rozumieme množinu bodov, do ktorých možno previesť systém (4.1) z bodu $\hat{x}_0$ na intervale $[0, k]$ riadeniami spĺňajúcimi (4.3). Symbolom $\Omega(), k$ označujeme dosiahnuteľnú množinu z bodu $x_0 = 0$.

V prípade, že systém je lineárny a autonómny, t.j.

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad (4.4)$$

počiatočná podmienka je v tvare

$$x_0 = 0$$

a nemáme ohraničenia na riadenie, t.j. $U_i = R^m$, vieme odvodiť niektoré zaujímavé výsledky a vlastnosti $\Omega(), k$. Vychádzajme pri tom zo vzťahu

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{s=0}^{k-1} A^{k-1-s} B u_s \quad (4.5)$$

Veta 4.1. *Množina $\Omega(0, k)$ tvorí lineárny priestor.*

Dôkaz tohoto tvrdenia prenechávame čitateľovi.

Veta 4.2. *Ak $k_1 \leq k_2$, potom $\Omega(0, k_1) \subset \Omega(0, k_2)$. To znamená, ak existuje riadenie $\mathcal{U}^1 = \{u_0^1, \dots, u_{k_1-1}^1\}$ prevádzajúce systém (4.4) z 0 do nejakého bodu $x_k \in \Omega(0, k_1)$ na intervale $[0, k_1]$, potom existuje riadenie $\mathcal{U}^2 = \{u_0^2, \dots, u_{k_2-1}^2\}$ prevádzajúce systém do toho istého bodu na intervale $[0, k_2]$.*

Dôkaz. tohoto tvrdenia už nie je celkom triviálny. Využíva skutočnosť, že pri "vypnutom" riadení, je $x_0 = 0$ pevným bodom zobrazenia definovaného pravou stranou rovnice (4.5). Z toho vyplýva, že na intervale $k_2 - k_1$ necháme príslušné $u_i = 0$ a potom nasadíme riadenie $\mathcal{U}_{k_1}$, ktoré prevedie 0 do $\Omega(0, k_1)$. Technika celého dôkaz spočíva vo využití (4.5) a správnom preindexovaní:

Nech $x \in \Omega(0, k_1)$, potom $x = \sum_{s=0}^{k_1-1} A^{k_1-1-s} B u_s^1$. Nech

$$\mathcal{U}^2 = \{u_0^2, \dots, u_{k_2-1}^2\} = \{0, \dots, 0, u_0^1, \dots, u_{k_1-1}^1\}$$

t.j., $u_i^2 = 0$, pre $i = 0, \dots, k_2 - k_1 - 1$ a $u_i^2 = u_{i-(k_2-k_1)}^1$. Potom

$$\sum_{s=0}^{k_2-1} A^{k_2-1-s} B u_s^2 = \sum_{s=k_2-k_1}^{k_2-1} A^{k_2-1-s} B u_{s-(k_2-k_1)}^1$$

Označíme $s' = s - (k_2 - k_1)$. Potom ak $s = k_2 - 1$, tak $s' = k_2 - 1 - k_2 + k_1 = k_1 - 1$ a teda

$$= \sum_{s'=0}^{k_1-1} A^{k_2-1-s'-k_2+k_1} B u_{s'}^1 = \sum_{s'=0}^{k_1-1} A^{k_1-1-s'} B u_{s'}^1 = x$$

□

4.2. Riaditeľnosť lineárnych systémov

Množinu

$$\Omega(0) := \bigcup_{k \geq 1} \Omega(0, k)$$

nazývame dosiahnuteľnou množinou z bodu 0.

Hovoríme, že systém (1) je *úplne riaditeľný z bodu 0*, ak $\Omega(0) = R^n$. (Samozrejme, $\Omega(0)$ podobne ako $\Omega(0, k)$ závisia od U_i !

Veta 4.3. *Ak $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$, potom je systém (4) (bez ohraničení na riadenie) úplne riaditeľný z bodu 0.*

Dôkaz. Nech by nebol úplne riaditeľný. To znamená, že $\Omega(0) \neq R^n$. Pretože však $\Omega(0)$ je lineárny priestor, tak existuje také $v \neq 0$, že $v^T x = 0$ pre všetky $x \in \bigcup_{k \geq 1} \Omega(0, k)$.

To znamená, že pre všetky k je $v^T \sum_{s=0}^{k-1} A^{k-1-s} B u_s = 0$, kde u_i sú z R^n ľubovoľné. V prípade, že $k = 1$ dostávame $v^T A^0 B u_0 = 0$ pre každé $u_0 \in R$, z čoho vyplýva, že

$$v^T B = 0. \quad (4.6^1)$$

Pre $k = 2$ dostávame, že $v^T (B u_0 + A B u_1) = 0$ a teda využijúc (4.6) je $v^T A B u_1 = 0$ pre každé $u_1 \in R$, z čoho dostávame, že

$$v^T A B = 0, \quad (4.6^2)$$

atď, až pre $k = n - 1$ dostaneme, že

$$v^T A^{n-1} B = 0. \quad (4.6^{n-1})$$

Zo vzťahov (4.6¹), (4.6²), ..., (4.6ⁿ⁻¹) dostávame

$$v^T (B, AB, \dots, A^{n-1} B) = 0,$$

čo je v spore s tým, že $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1} B) = 0$. $\square$