

Domáce úlohy pre predmet Optimálne riadenie

letný semester šk.r. 2000—2001

1. (P) Nájdite extrémalu pre úlohu variačného počtu danú funkcionálom

$$V[x] = \int_1^5 (3t + \sqrt{x})dt \text{ a podmienkami } x(1) = 3 \text{ a } x(5) = 7.$$

2. (N) Nájdite extrémalu pre úlohu variačného počtu danú funkcionálom

$$V[x] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\dot{x} + x\right)dt, \text{ kde } x(0) \text{ aj } x(1) \text{ sú voľné.}$$

3. (P) Nech $\hat{u}(t), t \in [0, \hat{T}]$ je optimálne riadenie a nech $\hat{x}(t)$ je optimálna odozva pre nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= (x^1)^2 + 2x^2u, & \dot{x}^2 &= x^1 + 4(x^2)^2u, & t &\in [0, T], \\ u(t) &\in [0, 1], \forall t \in [0, T], & x^1(0) &= 0, & x^2(0) &= 0, & x^1(T) + x^2(T) &= 8, \\ \max J &= \int_0^T [(x^2)^2 - x^1(u)^2]dt. \end{aligned}$$

Napíšte podmienky Pontrjaginovho princípu maxima pre toto riadenie.

4. (P) Nájdite riešenie podmienok PPM pre nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia:

$$\dot{x} = 2u, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ voľné}$$

$$u \in [-1, 1], \quad x(0) = 8, \quad x(T) = 0, \quad \min T.$$

5. (N) Nájdite riešenie podmienok PPM pre nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia :

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = u, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ voľné,}$$

$$x^1(0) = a > 0, \quad x^2(0) = 0, \quad x^1(T) = 0, \quad x^2(T) = 0, \quad \min J = \int_0^T \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2\right)dt.$$

6. (P) Nájdite riešenie podmienok PPM pre nasledujúcu OR:

$$\dot{x} = u, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ voľné,} \quad x(0) = 4, \quad x(T) = 5, \quad \min J = \int_0^T (t^2 + u^2)dt.$$

7. (N) Odvodte podmienky PPM pre nasledujúcu jednorozmernú OR:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ voľné}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = \phi(T), \quad (\phi \text{ je daná funkcia}), \quad u \in U,$$

$$\min J = \int_0^T f^0(x, u)dt.$$

Napíšte tieto podmienky v čo možno v najjednoduchšom tvare (bez nových premenných).

8. (P) Pre úlohu o optimálnej spotrebe sme už odvodili kvalitatívny vzťah medzi i , δ a spotrebou $C(t)$ pomocou Eulerovej rovnice. Odvodte teraz ten istý vzťah pomocou PPM a ekonomicky ho interpretujte.

$$\dot{K} = iK - C, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ dané}; \quad K(0) = K_0, \quad K(T) = K_T,$$

kde K_0 , K_T sú dané kladné čísla;

$$\max J = \int_0^T e^{-t\delta} U(C(t)) dt, \quad \text{kde } U_C > 0, \quad U_{CC} < 0.$$

9. (P) Riešte nasledujúcu OR:

$$\dot{x} = -x - u, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ voľné}$$

$$x(0) = a > 1, \quad x(T) \text{ voľné}, \quad u \in [0, 1], \quad \min J = \int_0^T 2dt + \frac{1}{2}(x(T))^2.$$

Túto úlohu možno interpretovať ako medicínsky problém znižovania infekcie nasledovne. Pacient, ktorý čaká na operáciu, sa nakazil infekciou ($x(t)$ - úroveň infekcie). Ak má byť operácia vykonaná, je potrebné znížiť úroveň infekcie. Keby sa nechal infekcii voľný priebeh, pacient by ju síce zdolal, ale mohlo by to trvať príliš dlho. Preto sa pacientovi podávajú lieky ($u(t)$ - vplyv liekov na zníženie infekcie), ktoré urýchľujú zdoľanie infekcie. Účelová funkcia modeluje dve konfliktné možnosti:

- redukovať infekciu a čakať s operáciou;
- operovať čím skôr aj keď je infekcia vysoká.

10. (N) Nájdite nejakú ekonomickú interpretáciu predchádzajúcej úlohy.

11.(P) Uvažujme nasledujúcu ÚOR:

$$\dot{x} = u, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ pevné}, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \text{ voľné}, \quad \max J = \int_0^T \left(x - \frac{u^2}{2}\right) dt.$$

V zmysle definície z prednášky, je to úloha $D(0, x_0)$.

(a) Definujte pre $t_0 \in [0, T]$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ príslušnú úlohu $D(t_0, x_0)$, a hodnotovú funkciu $V(t_0, x_0)$.

(b) Vyčísľte $V(t_0, x_0)$. Využite pri tom, že v tomto konkrétnom prípade je PPM aj postačujúcou podmienkou optimality.

(b) Preverte, či v tomto prípade platí vzťah medzi hodnotovou funkciou a adjungovanou funkciou odvodený na prednáške.

12.(N) Ukážte (stačí formálnym odvodením), že pre lineárno-kvadratickú úlohu

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ pevné}, \quad U = R^m, \quad C = R^n, \quad \min \int_0^T [x^T Q x + u^T R u] dt,$$

kde $Q = Q^T \geq 0$ a $R = R^T > 0$, je hodnotová funkcia V daná v tvare $V(t, x) = x^T W(t)x$, pričom W ($W = W^T \geq 0$) je riešením tzv. Riccatiho diferenciálnej rovnice

$$\frac{dW}{dt} + WA + A^T W - WBR^{-1}B^T W + Q = 0, \quad W(T) = 0$$

13. (P) Z príkladov, ktoré sme riešili na prednáškach resp. ako DÚ, si vyberte jeden a ukážte preň, že riadenie, ktoré sme našli pomocou PPM, je optimálne.

14. Uvažujme úlohu najrýchlejšieho premiestnenia riešenú na poslednej prednáške.

a) Využitím výsledkov z prednášky určte optimálne riadenie a optimálny čas v prípade, že $x_0^1 = -1$, $x_0^2 = 0$.

b) Podobným spôsobom ako na prednáške nájdite optimálne riadenie a optimálny čas ak x_0 leží nad w .

15. Urobte syntézu optimálneho riadenia pre úlohu najrýchlejšieho prechodu

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= -x^1 + u, & x^1(T) &= 0 \\ \dot{x}^2 &= x^2 + u, & x^2(T) &= 0, & |u| &\leq 1.\end{aligned}$$

16. Využitím vlastností singulárnych riadení zistite, ktoré hodnoty z množiny U môže nadobúdať optimálne riadenie pre úlohu:

$$\dot{x} = -\delta x + u, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ pevné}$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) \text{ voľné}, \quad u \in [0, 1], \quad \max J = \int_0^T ax(t)(1 - u(t))dt.$$

Túto úlohu možno interpretovať napr. ako problém o vzdelávaní: (x - úroveň vzdelania jednotlivca, u - pomerná časť pracovného času venovaná vzdelávaniu, $ax(t)$ - zárobok pre úroveň vedomostí x pri plnom výkone).

18. Riešte nasledovnú úlohu optimálneho riadenia:

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = a > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \min J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right) e^{-it} u^2 dt.$$

17. Zistite, či je systém $\dot{x}^1 = u^1$, $\dot{x}^2 = x^1 + u^2$, $\dot{x}^3 = x^2 + u^1 + u^2$ s oblasťou riadenia $U = [-1, 1] \times [-1, 1]$ normálny.