

Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Ústav aplikovanej matematiky MFF UK

Optimálne riadenie II

Učebné texty¹

Bratislava, 2000

¹Tento text je záznamom niektorých prednášok autorky z OR. Je poskytnutý študentom v dobrej viere, že im uľahčí sledovanie prednášky a prípravu na skúšku a zároveň, že nebude dôvodom na masovú neúčast na prednáškach alebo znudené pohľady von oknom. Vznikol aj vďaka amstex-ovým zápiskom Janky Štorovej a Mária Moravčíka.

1. VŠEOBECNÁ SCHÉMA SPOJITEJ ÚLOHY OPTIMÁLNEHO RIADENIA (ÚOR)

V minulom semestri sme sformulovali dve spojité ÚOR. Prvou bola úloha najrýchlejšieho premiestnenia (pozri Príklad 1 v učebnom texte Optimálne riadenie I pre zimný semester), druhou bola úloha o optimálnej spotrebe (Príklad 3). Sformulovali sme tiež všeobecnú schému ÚOR spoločnú pre spojité aj diskkrétne úlohy. V tomto semestri sa budeme zaoberať iba spojitými úlohami a preto všeobecnú schému upravíme do tvaru, ktorý viac vyhovuje spojitým úlohám.

1.1 Formulácia všeobecnej ÚOR.

Uvažujme objekt, ktorého správanie budeme pozorovať v spojitom čase $t \in [t_0, T]$. Okamžitý vstup v čase t do tohoto objektu je určený veličinou $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a okamžitý stav veličinou $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Správanie objektu v meniacom sa čase je popísané *diferenciálnou rovnicou*,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

kde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ je daná funkcia. Jednotlivé vstupy a stavy sú ohraňované ďalšími podmienkami. Takými podmienkami sú *počiatočná podmienka*

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

koncová podmienka, alebo podmienka na stavovú premennú v koncovom čase T

$$x(T) \in C, \quad (3)$$

ohraňovania na riadenie

$$u(t) \in U(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (4)$$

a *ohraňovania na stavovú premennú*

$$x(t) \in X(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (5)$$

”Kvalitu” jednotlivých vstupov ako funkcií času môžeme merať *účelovou funkciou*

$$\min J := \int_{t_0}^T f^0(t, x(t), u(t)) dt + \varphi(x(T)) \quad (6)$$

kde $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sú dané funkcie.

Funkcia, ktorá každému času $t \in [t_0, T]$ priradí hodnotu vstupu $u(t)$ do systému, sa nazýva riadením (ozn. $u(\cdot)$). Zatiaľ čo v diskrétnych úlohách riadeniami mohli byť ľubovoľné (diskrétné) funkcie, v spojitých úlohách funkcie $u(\cdot)$ musia mať také vlastnosti, aby boli splnené nasledovné podmienky:

- (i) pri zvolenom $u(\cdot)$ existuje $x(\cdot)$ riešenie diferenciálnej rovnice (1) s počiatočnou podmienkou (2) aspoň na nejakom intervale $(t_0, t_0 + \epsilon)$, $\epsilon > 0$;
- (ii) riešenie $x(\cdot)$ z bodu (i) je jednoznačne určené;
- (iii) pomocou zvolených riadení vieme riešiť dostatočne širokú triedu ÚOR.

Zvoľme funkciu $u(\cdot)$ a dosadíme ju do systému (1). Dostaneme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) = \tilde{f}(t, x(t)).$$

Z teórie diferenciálnych rovníc vieme, že ak $\tilde{f}$ je spojitá v t a spojitě diferencovateľná v x , tak príslušná diferenciálna rovnica má vlastnosť lokálnej existencie a jednoznačnosti. To znamená, že v prípade, že funkcia f je spojitá v prvej a tretej premennej, t.j. v t a v u a spojitě diferencovateľná v x , stačilo by žiadať, aby funkcie $u(\cdot)$ boli spojité. Potom by pre každé takéto riadenie príslušná zložená funkcia $\tilde{f}$ spĺňala predpoklady zabezpečujúce splnenie našich podmienok (i) a (ii). Bola by však takáto trieda riadení dostatočne široká, aby spĺňala aj podmienku (iii)? Pozrime sa na úlohu najrýchlejšieho premiestnenia z Príkladu 1. Intuitívne je jasné, aké musí byť riešenie tejto úlohy: najprv musíme vozík maximálnou silou roztláčať a potom maximálnou silou brzdiť. Optimálnym riadením pre túto úlohu teda bude nespojitě riadenie. Z tohoto príkladu je zrejmé, že triedu riadení musíme rozšíriť, ak v nej chceme zabezpečiť riešiteľnosť úloh typu Príkladu 1.

Vhodným rozšírením bude trieda po častiach spojitých² funkcií. Pre riadenia z takejto triedy tiež dostaneme splnenie podmienok (i) a (ii). Stačí iba aplikovať spomínanú teóriu diferenciálnych rovníc na každom z intervalov, kde je $u(\cdot)$ spojitě a príslušné riešenie diferenciálnej rovnice "spojitě nadpájať". Príslušné riešenie bude potom po častiach C^1 (viď obrázok z prednášky).³

Odteraz pod *riadeniami* budeme rozumieť po častiach spojitě funkcie $[t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Aby sme sa vyhli nedorozumeniu, v každom bode nespojitosti budeme riadeniu prisudzovať ako hodnotu jeho limitu sprava a v pravom krajom bode intervalu definície limitu zľava. *Odozvou* $x(\cdot)$ na riadenie $u(\cdot)$ budeme rozumieť príslušné riešenie $x(t) = x(t; x_0, u(t))$ rovnice (1) s podmienkou (2). Podotýkame, že odozva môže a nemusí byť definovaná na celom intervale $[t_0, T]$.

Pod *prípustným riadením* budeme rozumieť riadenie, ktoré spolu so svojou odozvou spĺňa ohraničenia (3), (4) a (5), t.j. $u(t) \in U(t)$, $t \in [t_0, T]$, príslušná odozva $x(\cdot)$ je definovaná (existuje) na celom intervale $[t_0, T]$, pričom $x(t) \in X(t)$ $t \in [t_0, T]$ a $x(T) \in C$.

Optimálne riadenie je také prípustné riadenie, ktoré minimalizuje účelovú funkciu

$$J(u(\cdot)) := \int_{t_0}^T f^0(t, x(t; x_0, u(\cdot)), u(t)) dt + \varphi(x(T; x_0, u(\cdot)))$$

v triede všetkých prípustných riadení.

1.2 Klasifikácia ÚOR.

Zavedieme niektoré pojmy, ktoré umožnia bližšie charakterizovať konkrétne ÚOR.

(1) Podľa intervalu, na ktorom uvažujeme celý proces, rozdeľujeme úlohy na úlohy s *pevným časom* (interval $[t_0, T]$ je vopred zadaný), *voľným časom* (interval je konečný, ale nie je vopred zadaný) a na *nekonečnom časovom horizonte* (intervalom je $[t_0, \infty)$).

(2) Počiatočná podmienka formulovaná vzťahom (2) je najčastejšie sa vyskytujúcou podmienkou. Teóriu optimálneho riadenia však možno aplikovať aj na úlohy so všeobecne zadanými počiatočnými podmienkami typu $x(t_0) \in P$, kde P môže byť zadané podobne ako cieľová množina C (viď nasledujúci odstavec).

²Po častiach spojitá funkcia má konečný počet bodov nespojitosti a v týchto bodoch má konečné jednostranné limity

³Triedu po častiach spojitých riadení možno ďalej rozšíriť na triedu merateľných funkcií pri použití tzv. Carathéodoryho teórie diferenciálnych rovníc. Pritom niektoré výsledky teórie optimálneho riadenia (napr. vety o existencii optimálnych riadení) sa dajú dokázať iba v triede merateľných riadení. My však bohaty vystačíme s riadeniami po častiach spojitými.

(3) Podľa typu koncovkej podmienky delíme úlohy na úlohy s *voľným koncom* ($C = \mathbb{R}^n$), úlohy s *pevným koncom* ($C = \{x_T\}$, kde $x_T \in \mathbb{R}^n$ je dané). Častokrát býva množina C zadaná ohraňovacími typom rovnosti $C = \{x \mid g(x) = 0\}$, kde g je zadaná funkcia, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$. Takéto úlohy sa niekedy nazývajú úlohami s *častočne voľným koncom*. V ekonomických úlohách sa stretávame aj s cieľovou množinou typu $C = \{x \mid g(x) \geq 0\}$.

(4) Množiny $U(t)$, definujúce ohraňovania na riadenie bývajú uzavreté podmnožiny $\mathbb{R}^m$. V prípade, že $U = \mathbb{R}^m$ hovoríme o úlohe *bez ohraňovania na riadenie*. Častokrát býva $U = \{u \in \mathbb{R}^m \mid u^i \in [\alpha_i, \beta_i], i = 1, \dots, m\}$.

(5) Ohraňovania na stavovú premennú (pokiaľ sa vyskytujú) bývajú zvyčajne zadané v tvare $h(x(t)) \leq 0$, kde h je daná funkcia. V ekonomických úlohách sa často vyskytujú ohraňovania v tvare $x(t) \geq 0$. Treba povedať, že ohraňovania na stavovú premennú veľmi komplikujú teóriu riadenia. Trochu lepšie si vie teória poradiť s ohraňovacími zmiešaného typu $h(x(t), u(t)) \leq 0$. V štandardnej úlohe sa však nevyskytujú žiadne ohraňovania na stavovú premennú, t.j. $X(t) \equiv \mathbb{R}^n$.

(6) V prípade, že ÚOR má účelovú funkciu v tvare (6), t.j. je súčtom integrálu a funkcie koncového stavu, hovoríme, že úloha je *Boľzovou tvare*. V prípade, že účelová funkcia je definovaná iba pomocou integrálu (t.j. $\phi \equiv 0$), hovoríme o *Lagrangeovej tvare*. Nakoniec, ak je účelová funkcia definovaná iba ako funkcia koncového stavu (t.j. $f_0 \equiv 0$), tak hovoríme o *Mayerovej tvare* úlohy. Dá sa ukázať, že všetky tri typy úloh sú ekvivalentné v tom zmysle, že jedna sa dá previesť na hociktorú druhú (i keď niekedy vyššieho rozmeru).

V teórii optimálneho riadenia majú významné miesto úlohy, kde $f^0 \equiv 1$ a zároveň $\varphi \equiv 0$, t.j. $J = T - t_0$. V tomto prípade vlastne minimalizujeme čas a takéto úlohy sa nazývajú úlohy *najrýchlejšieho prechodu*, alebo časovo optimálne úlohy.

V prípade, že všetky zadané funkcie a množiny vstupujúce do horeuvedenej schémy nezávisia explicitne od t , hovoríme o *autonómnej* ÚOR.

Historicky ÚOR predchádzali úlohy variačného počtu, ktoré sa dajú chápať ako podtrieda úloh spojitého optimálneho riadenia.

2. ZÁKLADNÁ ÚLOHA VARIAČNÉHO POČTU. EULEROVA ROVNICA

2.1. Formulácia základnej úlohy.

Pod základnou úlohou variačného počtu rozumieme úlohu nájsť (lokálny) extrém (maximum alebo minimum) nasledovného funkcionálu

$$\int_0^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = V(x(.))$$

za podmienok

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

Pritom $f^0: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je daná C^2 funkcia, $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ sú dané vektory a T je dané kladné číslo. Riešenie hľadáme v triede funkcií $x(.) \in C^1[0, T]$.

Ako takéto úlohy súvisia s ÚOR? Všimnime si, že funkcionál V sa podobá účelovej funkcii J z formulácie ÚOR až na člen $\dot{x}(t)$, kde v J máme $u(t)$ (riadenie). Je zrejmé, že pomocou označenia

$$u(t) := \dot{x}$$

môžeme základnú úlohu variačného počtu previesť na nasledovnú (špeciálnu) ÚOR

$$\dot{x} = u, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ dané}, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T,$$

$$\text{extr}J(u(.)) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt.$$

Je to úloha s pevným časom, bez ohraničenia na riadenie!

Poznamenajme, že naopak, iba niektoré ÚOR sa dajú previesť na úlohy variačného počtu. Takou je príklad zo zimného semestra o optimálnej spotrebe, ktorý bol formulovaný nasledovne:

$$\dot{k}(t) = ik(t) - c(t), \quad t \in [0, T], \quad T \text{ dané},$$

$$k(0) = k_0 > 0, \quad k(T) = k_T,$$

$$\max \int_0^T e^{-t\delta} U(c) dt,$$

kde U je daná funkcia spĺňajúca $U' > 0$ a $U'' < 0$.

Pretože z diferenciálnej rovnice vieme vyjadriť $c = ik - \dot{k}$, dosadením do účelovej funkcie dostávame úlohu variačného počtu

$$\max \int_0^T e^{-t\delta} U(ik - \dot{k}) dt$$

s podmienkami $k(0) = k_0 > 0$, $k(T) = k_T$.

2.2. Odvodenie nutných podmienok optimality.

Predpokladajme, že $\hat{x}(\cdot)$ je riešením ÚVP. Hľadáme takú vlastnosť krivky $\hat{x}(\cdot)$, ktorá by bola iná, než vlastnosti susedných kriviek. Susedné krivky budeme generovať pomocou tzv. variačných kriviek: $\delta x(\cdot) \in C^1[0, T]$, spĺňajúcich

$$\delta x(0) = 0, \quad \delta x(T) = 0. \tag{1}$$

Takéto variačné krivky nazývame prípustné. Susedné krivky definujeme nasledovne:

$$x_\varepsilon(t) = \hat{x}(t) + \varepsilon \delta x(t).$$

Je zrejmé, že

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = \dot{\hat{x}} + \varepsilon \dot{\delta x}(t)$$

a že keď $\varepsilon \rightarrow 0$ tak aj $x_\varepsilon(t)$ sa "blížia"⁴ ku $\hat{x}(t)$. Pre každú variačnú krivku $\delta x(\cdot)$, môžeme teraz definovať $V(x_\varepsilon(\cdot))$ ako funkciu ε nasledovne

$$F(\varepsilon) := V(x_\varepsilon(\cdot)) = \int_0^T f^0(t, x_\varepsilon(t), \dot{x}_\varepsilon(t)) dt.$$

⁴Čo rozumieť pod konvergenciou funkcií tu nešpecifikujeme

Zrejme $F(0) = V(\hat{x}(\cdot))$ a pretože $V(\hat{x}(\cdot))$ bola extrémálna hodnota funkcionálu V , tak aj funkcia $F(\varepsilon)$ nadobúda extrém v bode $\varepsilon=0$. Pretože $F(\varepsilon)$ je diferencovateľná, musí byť v bode $\varepsilon=0$ splnená nutná podmienka extrému. Dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^T \frac{d}{d\varepsilon} f^0(t, \hat{x} + \varepsilon \delta x, \dot{\hat{x}} + \varepsilon \delta \dot{x}) \Big|_{\varepsilon=0} dt \\ &= \int_0^T \left[\frac{\partial f^0}{\partial x}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \delta x + \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \delta \dot{x} \right] dt. \end{aligned}$$

Na druhý sčítanec použijeme per partes a pokračujeme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \left[\frac{\partial f^0}{\partial x}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \delta x - \frac{d}{dt} \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \delta x \right] dt + \left[\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \delta x \right]_0^T = \quad (2a) \\ &= \int_0^T \left[\frac{\partial f^0}{\partial x}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \right] \delta x dt, \quad (2) \end{aligned}$$

kde sme použili vlastnosť (1) prípustných variačných kriviek. Dostali sme, že integrál (2) má byť rovný nule pre ľubovoľnú prípustnú variačnú krivku $\delta x(\cdot)$. Z toho sa dá odvodiť, že aj hodnota výrazu pod integrálom musí byť rovná nule v každom $t \in [0, T]$, t.j.

$$\frac{\partial f^0}{\partial x}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3)$$

Rovnica (3) sa nazýva *Eulerova rovnica*. Skrátene ju zapisujeme (bez argumentov) v tvare

$$\boxed{f_x^0 - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}^0 = 0.}$$

Čo je to za rovnica? Rozpíšme deriváciu podľa času v druhom výraze v (3).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial^2 f^0}{\partial \dot{x} \partial t}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \frac{\partial^2 f^0}{\partial \dot{x} \partial x}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \cdot \dot{\hat{x}} - \frac{\partial^2 f^0}{\partial \dot{x}^2}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \ddot{\hat{x}}$$

Teda Eulerova rovnica je vlastne diferenciálna rovnica druhého rádu:

$$\frac{\partial f^0}{\partial x}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \frac{\partial^2 f^0}{\partial \dot{x} \partial t}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \frac{\partial^2 f^0}{\partial \dot{x} \partial x}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \cdot \dot{\hat{x}} - \frac{\partial^2 f^0}{\partial \dot{x}^2}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \ddot{\hat{x}} = 0. \quad (4)$$

Spolu s okrajovými podmienkami dáva Eulerova rovnica (formálne) dostatok podmienok na určenie $\hat{x}(\cdot)$.

2.3. Poznámky.

1. Eulerova rovnica je nutnou podmienkou optimality (prvého rádu) pre UVP. Je spoločná pre maximum aj minimum.

2. Nutnými podmienkami druhého rádu sú tzv. Legendrove podmienky, ktoré umožňujú rozlíšiť maximum od minima. Pre minimum je to podmienka $f_{\dot{x}\dot{x}}^0 \geq 0, \forall t$ a pre maximum $f_{\dot{x}\dot{x}}^0 \leq 0, \forall t$. (Všimnime si analógiu s diferenciálnym počtom.)

3. V prípade, že $f^0(t, x, \dot{x})$ je konvexná (konkávna) v premennej $(x, \dot{x})$, potom Eulerova rovnica je aj postačujúca podmienka pre min (max).

4. Ak koncový stav $x(T)$ nie je vopred zadaný, t.j. ak je úloha s voľným koncom, tak sa dajú miernou modifikáciou horeuvedeného postupu odvodiť nutné podmienky aj pre takúto úlohu. Zrejme prípustné variačné krivky budú musieť spĺňať iba podmienku $\delta x(0) = 0$. To znamená prípustné budú aj variačné krivky spĺňajúce $\delta x(T) = 0$ aj $\delta x(T)$ ľubovoľné. Analogicky, ako v predchádzajúcom prípade, dostaneme vzťah (2a). Potom pomocou variačných kriviek, ktoré spĺňajú $\delta x(T) = 0$, dostaneme platnosť Eulerovej rovnice. Dosadíme ju do (2a). Z podmienky $\delta x(T) = 0$ dostaneme, že musí platiť $\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} \delta x|_{t=T} = 0$ pre všetky δx , (teda aj tie, ktoré majú $\delta x(T) \neq 0$) a teda dostávame podmienku

$$\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}}|_{t=T} = 0.$$

Táto podmienka sa nazýva *podmienkou transversality* a dopĺňa systém podmienok pre určenie $\hat{x}$ pre úlohu s voľným pravým koncom. Analogické podmienky v čase $t = 0$ možno odvodiť v prípade, že nie je zadané $x(0)$.

5. V prípade, že nie je pevne zadané T , možno modifikovať odvodenie nutných podmienok aj pre prípad T -voľné. V tomto prípade za triedu susedných kriviek treba zobrať krivky definované na intervaloch premenlivej dĺžky $[0, \hat{T} + \varepsilon \delta T]$ a tomuto faktoru sa dá prispôbiť aj zvyšok dôkazu. K Eulerovej rovnici ako výsledok pribudne podmienka

$$\left(f^0 - \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right)_{t=T} = 0$$

formálne umožňujúca vypočítať optimálne $\hat{T}$.

6. Vo variačnom počte sa skúmajú aj úlohy s rôznymi ďalšími ohraničeniami napr. $\varphi(x(T)) = 0$, $x(T) \geq 0$ a pod. Pretože však každú úlohu variačného počtu možno preformulovať do úlohy optimálneho riadenia, ktoré budeme analyzovať pomerne vo všeobecnom tvare, nebudeme sa ďalej všeobecnejšími úlohami variačného počtu zaoberať.

2.4. Príklady.

Príklad. Riešme úlohu variačného počtu

$$V(x) = \int_0^2 (12tx + \dot{x}^2) dt, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 8.$$

Zrejme $f_x^0 = 12t$, $f_{\dot{x}}^0 = 2\dot{x}$, $f_{\dot{x}t}^0 = 0$, $f_{xx}^0 = 0$, $f_{x\dot{x}}^0 = 2$. Dosadením do (4) dostávame Eulerovu rovnicu pre daný príklad

$$12t - 2\ddot{x} = 0.$$

Hľadáme jej všeobecné riešenie

$$\ddot{x} = 6t \Rightarrow \dot{x} = 3t^2 + c_1 \Rightarrow x = t^3 + c_1 t + c_2.$$

Z okrajových podmienok vyplýva, že $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ a teda $x(t) = t^3$. Teda, ak daná úloha má extrém, potom ho nadobúda vo funkcii $\hat{x}(t) = t^3$.

Príklad. Riešme už spomínanú úlohu o optimálnej spotrebe. Predpokladajme, že $i, \delta > 0$.

Túto úlohu formulujeme ako

$$\max \int_0^T e^{-t\delta} U(ik - \dot{k}) dt, \quad k(0) = k_0 > 0, \quad k(T) = k_T.$$

Zrejme

$$\begin{aligned} f_k^0 &= e^{-t\delta} U'(ik - \dot{k})i, \\ f_{\dot{k}}^0 &= e^{-t\delta} U'(ik - \dot{k})(-1), \\ f_{\dot{k}t}^0 &= \delta e^{-t\delta} U'(ik - \dot{k}), \\ f_{kk}^0 &= -e^{-t\delta} i U''(ik - \dot{k}), \\ f_{k\dot{k}}^0 &= e^{-t\delta} U''(ik - \dot{k}) \end{aligned}$$

Dosadením do Eulerovej rovnice (4) dostávame

$$e^{-t\delta} U'(ik - \dot{k})i - \delta e^{-t\delta} U'(ik - \dot{k}) + e^{-t\delta} U''(ik - \dot{k})i\dot{k} - e^{-t\delta} U''(ik - \dot{k})\ddot{k} = 0$$

Po úpravách a využitím $\dot{c} = i\dot{k} - \ddot{k}$ dostaneme

$$(i - \delta) = -\frac{U''(ik - \dot{k})}{U'(ik - \dot{k})}\dot{c}.$$

Pretože $-\frac{U''}{U'} > 0$ tak dostávame, že $\dot{c}$ má to isté znamienko ako $(i - \delta)$. Teda

ak $i > \delta$, tak spotreba rastie

ak $i < \delta$, tak spotreba klesá

ak $i = \delta$, tak je spotreba konštantná.

To znamená, že ak je úroková miera i väčšia ako spotrebiteľova miera netrpezlivosti δ , tak je optimálne odkladať spotrebu na neskôr a teda tok spotreby rastie v čase.

To sme dostali kvalitatívny výsledok aj keď sme nepoznali konkrétny tvar funkcie U .

Ak zadáme $U(c) = \ln(c)$ a $K_T = 0$, budeme vedieť z nutných podmienok nájsť riešenie v uzavretom tvare.

Dosadíme:

$$(i - \delta) \frac{1}{ik - \dot{k}} - \frac{1}{(ik - \dot{k})^2} (i\dot{k} - \ddot{k}) = 0$$

$$(i - \delta)(ik - \dot{k}) - (i\dot{k} - \ddot{k}) = 0$$

$$i^2 k - i\dot{k} - i\delta k + \delta\dot{k} - i\dot{k} + \ddot{k} = 0$$

$$\ddot{k} + (\delta - 2i)\dot{k} + (i^2 - i\delta)k = 0$$

Charakteristická rovnica

$$\lambda^2 + (\delta - 2i)\lambda + (i^2 - i\delta) = 0$$

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = i - \delta$$

Všeobecné riešenie

$$k(t) = Ae^{it} + Be^{(i-\delta)t}$$

Využijeme počiatočnú a koncovú podmienku na určenie A, B . Postupne dostaneme

$$k_0 = k(0) = A + B \Rightarrow A = k_0 - B$$

$$0 = k_T = k(T) = (k_0 - B)e^{iT} + Be^{(i-\delta)T} = k_0e^{iT} - e^{iT}B(1 - e^{-\delta T})$$

$$\Rightarrow B = \frac{k_0}{1 - e^{-\delta T}}$$

$$\Rightarrow A = k_0(1 - \frac{1}{1 - e^{-\delta T}})$$

$$k(t) = k_0e^{it} \frac{e^{-\delta t} - e^{-\delta T}}{1 - e^{-\delta T}}$$

Dostali sme jediného kandidáta na riešenie danej úlohy.

3. ŠTANDARDNÁ ÚOR. PONTRJAGINOV PRINCÍP MAXIMA.

3.1. Formulácia štandardnej ÚOR.

Pod štandardnou ÚOR budeme rozumieť autonómnou úlohu s voľným časom, bez ohraňení na stavovú premennú, s Lagrangeovou účelovou funkciou, popísanú nasledovne:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad T \text{ voľné, kde } f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

$$x(T) \in C = \{x \mid g(x) = 0\}, \quad \text{kde } g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad (3)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

$$\min J(T, u(\cdot)) = \int_0^T f^0(x(t), u(t))dt, \quad \text{kde } f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}. \quad (6)$$

Budeme predpokladať, že $f, f^0, g \in C^1$. Ďalej budeme predpokladať, že $l \leq n$ a že vektory $\frac{\partial g^i(x)}{\partial x}(x)$ sú lineárne nezávislé pre každé $x \in C$. Túto úlohu budeme označovať ŠÚOR.

3.2 Formulácia PPM.

V tejto časti sformulujeme Pontrjaginov princíp maxima pre ŠÚOR. Podobne ako v diskretnom prípade, aj tu bude do formulácie vstupovať nová premenná $\psi \in \mathbb{R}^n$ a konštanta ψ^0 . Nech $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$ je optimálne riadenie pre ŠÚOR a $\hat{x}(t)$ je jeho odozva. Pod *adjungovanou rovnicou (AR)* rozumieme

$$\dot{\psi} = -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T \psi(t). \quad (\text{AR})$$

Podmienka transversality (PT) je definovaná:

$$\exists \chi \in R^l : \quad \psi(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x} \right)^T \chi. \quad (PT)$$

Hamiltonova funkcia (HF) :

$$H(x, u, \psi, \psi^0) = \psi^0 f^0(x, u) + \psi^T f(x, u). \quad (HF)$$

Pod podmienkou maxima (PM) budeme rozumieť:

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) = \max_{u \in U} H(\hat{x}(t), u, \psi(t), \psi^0), \quad \forall t \in [0, \hat{T}] \quad (PM)$$

a podmienkou stacionarity (PS) :

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, \hat{T}]. \quad (PS)$$

Veta : Pontrjaginov princíp maxima. *Nech $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$ je optimálne riadenie pre ŠÚOR a nech $\hat{x}(t)$ je jeho odozva. Potom existuje $(\psi^0, \psi(t)) \neq 0$, $\psi^0 \leq 0$, ktoré je riešením adjungovanej rovnice (AR) a podmienky transversality (PT) také, že Hamiltonova funkcia (HF) spĺňa podmienku maxima (PM) a podmienku stacionarity (PS).*

Dôkaz. Dôkaz je dlhý a ťažký, preto ho vynecháme.

3.3. Poznámky.

(a) Všimnime si, že (AR) ako aj (PM) sú lineárne v (ψ^0, ψ) . Z toho vyplýva ak $\hat{x}, \hat{u}$ spĺňajú PPM s nejakým $(\psi^0, \psi(t))$ potom $\hat{x}, \hat{u}$ spĺňajú PPM aj s $c(\psi^0, \psi(t))$, $c > 0$. Pretože podľa PPM bolo $\psi^0 \leq 0$, zrejme stačí uvažovať iba dve možné hodnoty ψ^0 , a to 0 a -1 .

(b) PPM dáva formálne dosť podmienok na určenie $\hat{x}$, $\hat{u}$, T (a ψ). Skutočne, v prípade voľného $u \in R^m$, dáva (PM) m podmienok pre u . Diferenciálne rovnice (1) a (AR) spolu s počiatočnými podmienkami, koncovými podmienkami a podmienkami transversality dávajú podmienky pre funkcie $x(\cdot)$, $\psi(\cdot)$. Podmienka (PS) je podmienkou pre T a pomáha častokrát vylúčiť prípad ψ^0 .

(c) PPM je nutnou podmienkou optimality. Riešením týchto podmienok získame iba kandidátov na optimálne riešenie úlohy. Ak získame práve jedného kandidáta a z iných zdrojov (existenčné vety), budeme vedieť, že úloha má optimálne riešenie, tak tento jediný kandidát je aj optimálnym riešením. V niektorých prípadoch je však PPM, ako uvidíme neskôr, aj postačujúcou podmienkou.

(d) V prípade, že máme úlohu na voľný koniec, kde $C = R^n$, tak $\psi(T) = 0$. Toto tvrdenie sa dá (formálne) odvodiť z (PT). Cieľovú množinu možno popísať ako $C = \{x \in R^n \mid g(x) = 0\}$, kde $g \equiv 0$ a teda $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.

(e) Vo všeobecnosti platí

$$x^i(T) = \begin{cases} \text{voľné,} & \text{pre } i = 1, \dots, n' \\ x_T^i, & \text{pre } i = n' + 1, \dots, n \end{cases} \Rightarrow \psi^i(\hat{T}) = \begin{cases} 0, & \text{pre } i = 1, \dots, n' \\ \chi^i, & \text{pre } i = n' + 1, \dots, n \end{cases}$$

3.4. Riešenie úloh.

Príklad 1. Nájdite riadenie a jeho odozvu, ktoré spĺňajú podmienky Pontrjaginovho princípu maxima pre nasledovnú úlohu najrýchlejšieho prechodu:

$$\dot{x} = x + u, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ voľné}$$

$$x(0) = 5, \quad x(T) = 11$$

$$u(t) \in [-1, 1]$$

$$\min T, \quad \text{t.j.} \quad \min J := \int_0^T 1 dt.$$

Riešenie: Zrejme $n = 1$, $m = 1$, $f = x + u$ a $f^0 = 1$, $g = x - 11$. Dosadením do adjungovanej rovnice (AR) dostaneme

$$(AR) \quad \dot{\psi} = -\psi \Rightarrow \psi(t) = ke^{-t}.$$

Z podmienky transversality vyplýva, že

$$(PT) \quad \psi(T) = \chi,$$

čo nedáva žiadnu informáciu, pretože χ nepoznáme. Dosadením do podmienky maxima dostaneme, že je treba riešiť maximalizačnú úlohu, ktorú formálne zapíšeme ako

$$(PM) \quad \psi^0 + \psi(x + u) \rightarrow \max_{u \in [-1, 1]}.$$

Táto úloha je ekvivalentná s úlohou

$$\psi u \rightarrow \max_{u \in [-1, 1]}$$

a jej riešením dostávame

$$u = \begin{cases} 1, & \text{ak } \psi > 0 \\ -1, & \text{ak } \psi < 0 \\ \text{neurčené,} & \text{ak } \psi = 0 \end{cases}.$$

Podíme analyzovať prípad $\psi = 0$, kedy riadenie nie je určené z podmienky maxima. Ak by v nejakom t bolo $\psi(t) = 0$ tak by z vypočítaného tvaru adjungovanej funkcie vyplývalo, že $k = 0$ a teda $\psi(t) \equiv 0$. Z toho dostávame, že $\psi^0 = -1$. Dosadením týchto hodnôt do Hamiltonovej funkcie by sme dostali, že $H \equiv -1$, čo je spor s podmienkou stacionarity (PS). Z toho vyplýva, že $k \neq 0$ a dostávame iba dvoch kandidátov na optimálne riadenie: $u \equiv 1$ alebo $u \equiv -1$. Z podmienky (PS) postupne dostávame

$$H|_{t=\hat{T}} = 0$$

$$\psi^0 + \psi(\hat{T})(11 + \pm 1) = \psi^0 + ke^{-t}(11 + \pm 1) = 0$$

$$ke^{-t}(11 + \pm 1) > 0 \Rightarrow \psi^0 = -1$$

$$k > 0 \Rightarrow u(t) \equiv 1$$

Podmienka (PS) teda umožnila vylúčiť jedného kandidáta a zostáva jediným kandidátom $u(t) \equiv 1$. Vypočítame odovzdu na takéto riadenie

$$\dot{x} = x + 1 \Rightarrow x(t) = e^t x_0 + \int_0^t e^{t-s} ds = 5e^t + e^t[-e^{-s}]_0^t = 6e^t - 1$$

a z požiadavky na splnenie koncového stavu určíme optimálny čas:

$$11 = x(\hat{T}) = 6e^{\hat{T}} - 1 \Rightarrow \hat{T} = \ln 2$$

Dostali sme jediného kandidáta na optimálne riadenie

$$\hat{u}(t) = 1, \quad t \in [0, \ln 2] \quad \hat{x}(t) = 6e^t - 1$$

Všimnime si, z podmienky stacionarity v bode $t = T$ môžeme určiť k :

$$(\text{PS})|_{t=T} \rightarrow -1 + k \frac{1}{2} 12 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{6}$$

a že podmienka stacionarity naozaj platí v každom t :

$$(\text{PS})|_t \rightarrow -1 + \frac{1}{6} e^{-t} (6e^t - 1 + 1) = 0.$$

Túto vlastnosť sme však v tomto príklade nepotrebovali na určenie riadenia.

Príklad 2. Nájdite riadenie spĺňajúce podmienky PPM pre nasledujúcu úlohu:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, & x^1(0) &= a_1, \\ \dot{x}^2 &= x^3, & x^2(0) &= a_2, \\ \dot{x}^3 &= u, & x^3(0) &= a_3 > 0 \end{aligned}$$

$$x^3(T) = 0, \quad t \in [0, T], \quad T - \text{voľné}$$

$$\min \int_0^T \left(k + \frac{u^2}{2} \right) dt, \quad k > 0$$

Riešenie: Zrejme $n = 3$, $m = 1$, $l = 1$, $g(x^1, x^2, x^3) = x^3$. Dosadením do podmienky transversality dostávame

$$(\text{PT}) \quad \psi^1(T) = \psi^2(T) = 0.$$

Z adjungovanej rovnice

$$(\text{AR}) \quad \begin{pmatrix} \dot{\psi}^1 \\ \dot{\psi}^2 \\ \dot{\psi}^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \psi^0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}$$

dostávame použitím výsledkov z (PT)

$$\begin{aligned}\dot{\psi}^1 &= 0 &\Rightarrow &\psi^1 \equiv 0 \\ \dot{\psi}^2 &= -\psi^1 &\Rightarrow &\psi^2 \equiv 0 \\ \dot{\psi}^3 &= -\psi^2 &\Rightarrow &\psi^3(t) \equiv C\end{aligned}.$$

Podmienka maxima sa formálne zapíše ako:

$$(PM) \quad \psi^0 \left(k + \frac{u^2}{2} \right) + \psi^1 f^1 + \psi^2 f^2 + Cu \rightarrow \max_{u \in R}$$

Všimnime si, že ak by $\psi^0 = 0$ tak v (PM) dostaneme lineárnu funkciu. Lineárna funkcia na R nadobúda extrém iba ak je konštantná, t.j. ak $C = 0$. Z toho vyplýva, že všetky ψ sú nulové, čo je spor s tvrdením PPM. Preto $\psi^0 = -1$ a (PM) má tvar

$$- \left(k + \frac{u^2}{2} \right) + Cu \rightarrow \max$$

Hľadáme maximum konkávnej funkcie. Nutná podmienka prvého rádu je zároveň aj postačujúcou:

$$-u + C = 0 \Rightarrow u = C$$

$$C = 0 \Rightarrow \text{spor s (PS)} \Rightarrow C \neq 0$$

Naozaj, dosadíme vypočítané riadenie do Hamiltonovej funkcie. Dostaneme

$$H|_t = - \left(k + \frac{C^2}{2} \right) + C^2 = 0$$

Po úprave

$$-k + \frac{C^2}{2} = 0 \Rightarrow C^2 = 2k \Rightarrow C = \pm\sqrt{2k}$$

Opäť dostávame dvoch kandidátov na optimálne riadenie. Dosadíme $u = C$ do diferenciálneho systému zo zadania úlohy a použijeme aj koncovú podmienku. Dostaneme

$$\hat{T} = \frac{-a_3}{C} \Rightarrow C < 0 \quad \text{teda} \quad C = -\sqrt{2k}$$

4. NEAUTONÓMNA ÚLOHA. ÚLOHA S PEVNÝM ČASOM

Štandardná neautonómna úloha sa líši od štandardnej autonómnej úlohy tým, že funkcie f^0, f závisia aj explicitne od t . Pritom interval $[t_0, T]$, na ktorom úlohu uvažujeme môže byť buď pevne daný, alebo jeho pravá strana môže byť voľná. To znamená, budeme sa zaoberať úlohami v tvare

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, T], \quad T - \text{voľné alebo pevné} \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

$$x(T) \in C = \{x \mid g(x) = 0\} \quad (3)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, T] \quad (4)$$

$$J = \int_{t_0}^T f^0(t, x, u) dt \longrightarrow \min \quad (6)$$

Analogicky ako v autonómnom prípade, aj tu môžeme definovať Hamiltonovu funkciu pomocou adjungovanej premennej predpisom

$$H := \psi^0 f^0(t, x, u) + \psi^T f(t, x, u) \quad (\text{HF})$$

ale aj adjungovanú rovnicu

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (\text{AR})$$

podmienku transversality

$$\exists \chi \in R^l : \psi(T) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^T \chi, \quad g : R^n \longrightarrow R^l \quad (\text{PT})$$

a podmienku maxima

$$H \longrightarrow \max_{u \in U} \quad (\text{PM})$$

Našou snahou je pre takéto úlohy odvodiť nutné podmienky optimality vyjadrené pomocou (HF). Pri tom použijeme PPM pre autonómne úlohy sformulovaný v predchádzajúcej časti. Prevedieme našu neautonómnu úlohu na autonómnu (vyššej dimenzie). Na túto úlohu aplikujeme PPM a potom získané podmienky naspäť prepíšeme pomocou (HF).

Označíme t ako novú stavovú premennú $x^{n+1} := t$. Zrejme

$$\dot{x}^{n+1} = 1, \quad x^{n+1}(t_0) = t_0, \quad x^{n+1}(T) = \begin{cases} T_d \\ \text{voľné} \end{cases}$$

Potom dostávame štandardnú ÚOR (autonómnu, s voľným časom), danú diferenciálnym systémom

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x^{n+1}, x, u), \quad t \in [t_0, T], \quad T - \text{voľné} \\ \dot{x}^{n+1} &= 1. \end{aligned} \quad (\tilde{1})$$

s počiatočnou podmienkou

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x^{n+1}(t_0) &= t_0 \end{aligned} \quad (\tilde{2})$$

a cieľovou množinou zadanou alternatívne ako

$$\tilde{C}_v = \{(x, x^{n+1}) \mid x \in C, x^{n+1} \in R\} = \{(x, x^{n+1}) \mid g(x) = 0\}, \quad (\tilde{3a})$$

ak pôvodná úloha bola úloha s voľným časom a

$$\tilde{C}_p = \{(x, x^{n+1}) \mid g(x) = 0, x^{n+1} - T_d = 0\}, \quad (\tilde{3b})$$

ak pôvodná úloha bola s pevne zadaným časom $T = T_d$.

Zrejme ohraničenia na riadenie zostanú nezmenené

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, T] \quad (\tilde{4})$$

a účelovú funkciu dostaneme v tvare

$$J = \int_{t_0}^T f^0(x^{n+1}, x, u) dt \longrightarrow \min \quad (\tilde{6})$$

Napíšme teraz pre túto "vlnovkovú" úlohu podmienky PPM. Pretože "vlnovková" úloha má $n + 1$ rozmernú stavovú premennú, tak aj adjungovaná premenná bude mať ten istý rozmer a teda $\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^{n+1} \end{pmatrix}$, kde $\psi \in \mathbb{R}^n$. Potom zrejme

$$\tilde{H} = \psi^0 f^0 + \tilde{\psi}^T \tilde{f} = \psi^0 f^0 + \psi^T f + \psi^{n+1} f^{n+1} = H + \psi^{n+1}(t) \quad (\tilde{H}F,)$$

pretože $f^{n+1} = 1$. Z tohoto vzťahu vidieť, že podmienka maxima

$$\tilde{H} \longrightarrow \max_{u \in U} \quad (P\tilde{M})$$

je ekvivalentná podmienke

$$H \longrightarrow \max_{u \in U} \quad (PM)$$

a teda podmienku maxima máme vyjadrenú pomocou (HF). Napíšme teraz adjungovanú rovnicu pre vlnovkovú úlohu.

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\psi}^{n+1} \end{pmatrix} = -\psi^0 \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \\ \frac{\partial f^0}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T & \left(\frac{\partial f^{n+1}}{\partial x}\right)^T \\ \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}} & \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^{n+1} \end{pmatrix} \quad (\tilde{A}R)$$

Pretože $\left(\frac{\partial f^{n+1}}{\partial x}\right)^T = 0$ a $\frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^{n+1}} = 0$, tak poslednú rovnicu zapíšeme v zložkovom tvare ako

$$\dot{\psi} = -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi \quad (AR)$$

$$\dot{\psi}^{n+1} = -\psi^0 \frac{\partial f^0}{\partial x^{n+1}} - \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}} \psi \quad (AR+)$$

Podmienku transversality napíšeme najprv pre prípad cieľovej množiny C_v (pôvodná úloha s voľným časom).

$$\begin{pmatrix} \psi(T) \\ \psi^{n+1}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^T}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} \chi \quad (P\tilde{T}_v)$$

Pretože v tomto prípade je $\frac{\partial g}{\partial x^{n+1}} = 0$, tak rozpisom $(P\tilde{T})$ do zložkového tvaru dostaneme

$$\psi(T) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \chi, \quad (PT)$$

$$\psi^{n+1}(T) = 0. \quad (\text{PTv+})$$

V prípade cieľovej množiny C_p (pôvodná úloha s pevným časom) dostaneme

$$\begin{pmatrix} \psi(T) \\ \psi^{n+1}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x^{n+1}} & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \chi^{l+1} \end{pmatrix} \quad (\tilde{P}T_p)$$

Pretože $\frac{\partial x^{n+1}}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial g}{\partial x^{n+1}} = 0$, tak dostávame

$$\psi(T) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \chi \quad (\text{PT})$$

$$\psi^{n+1}(T) = \chi^{l+1} \quad (\text{PTp+})$$

Nakoniec napíšeme podmienku stacionarity pre vlnovkovú úlohu

$$\psi^0 f^0 + \psi^T f + \psi^{n+1} = H + \psi^{n+1} \equiv 0 \quad (\tilde{P}S)$$

V nej vystupuje veličina $\psi^{n+1}(t)$ pre ktorú máme rovnicu (AR+) a prípadne aj koncovú podmienku (PTv+), ak bola pôvodná úloha s voľným časom. Keď "dosadíme" tieto informácie do $(\tilde{P}S)$ dostávame, že v prípade, že pôvodná úloha bola (neautonómna) s voľným časom, tak

$$H|_{t=T} = 0.$$

V prípade, že pôvodná úloha bola (neautonómna) s pevným časom, tak podmienka stacionarity neplatí (H sa rovná neznámej funkcii). Zaujímavý výsledok dostávame, ak pôvodná úloha bola autonómna s pevným časom. Vtedy adjungovaná rovnica (AR+) pre ψ^{n+1} dáva $\dot{\psi}^{n+1} = 0$, z čoho vyplýva, že ψ^{n+1} je konštantné. Dosadiac toto do $\tilde{P}S$ dostaneme

$$H = \text{konšt.}$$

Tieto výsledky môžeme sformulovať do vety.

Veta. *Oproti ŠÚOR (autonómna s voľným časom) sa pre úlohy*

- a) *neautonómne s voľným časom*
- b) *neautonómne s pevným časom*
- c) *autonómne s pevným časom*

zmení znenie PPM iba v (PS). To znamená miesto podmienky

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) \equiv 0, \quad \forall t \in [0, \hat{T}].$$

máme v jednotlivých prípadoch nasledovné podmienky

- a) $H(\hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), \psi^0, \psi(\hat{T})) = 0$
- b) *žiadna podmienka*
- c) $H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t)) \equiv \text{konšt.}, \quad \forall t \in [t_0, T_d],$ *kde T_d je daná hodnota koncového času.*

Príklad : Riešme nasledovnú ÚOR

$$\dot{x} = u \quad t \in [t_0, T], \quad T - \text{pevné}$$

$$x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in [0, 1]$$

$$J = \int_0^{T_d} (u - x) dt \rightarrow \min.$$

Riešenie: Zrejme ide o autonómnú úlohu s pevným časom a voľným koncom. Analyzujeme najprv podmienku transversality

$$\psi(T) = 0 \quad (\text{PT})$$

Z nej dosávame, že

$$\psi^0 = -1.$$

Adjungovaná rovnica má tvar

$$\dot{\psi} = -1. \quad (\text{AR})$$

Jej všeobecným riešením je

$$\psi(t) = -t + c$$

a riešením spĺňajúcim aj (PT) je

$$\psi(t) = T - t.$$

Podmienka maxima má tvar

$$x - u + \psi u \rightarrow \max_{u \in [0,1]} \quad (\text{PM})$$

z čoho dostávame

$$(\psi - 1)u \rightarrow \max_{u \in [0,1]}$$

a riešením tejto podmienky je

$$u = \begin{cases} 1 & \psi > 1 \\ 0 & \psi < 1 \\ ? & \psi \neq 1 \end{cases}$$

Tým sme vyjadrili u ako funkciu ψ . Naším cieľom je vyjadriť riadenie ako funkciu času. Preto budeme analyzovať $\psi(t)$. Keďže ψ je klesajúca lineárna funkcia, prípad $\psi = 1$, v ktorom u nie je určené, môže nastať (v intervale $[0, T]$) najviac raz. V takomto bode určíme riadenie ako limitu sprava. Môžu nastať dva prípady. Buď je $T \leq 1$ a potom aj

$$(a) \quad \psi(t) = T - t < 1, \quad \forall t \in [0, T] \Rightarrow u(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

alebo je $T > 1$ a v bode $t_1 = T - 1$ je $\psi(t_1) = 1$. Pretože $\psi(t)$ je klesajúca, tak

$$(b) \quad \left. \begin{array}{l} \psi(t) > 1 \quad \forall t \in [0, T - 1] \\ \psi(t) < 1 \quad \forall t \in [T - 1, T] \end{array} \right\} \Rightarrow u = \begin{cases} 1 & t \in [0, T - 1] \\ 0 & t \in [T - 1, T] \end{cases}$$

Vypočítajme odozvy pre oba prípady dosadením príslušných riadení do stavovej rovnice.

$$(a) \quad T \leq 1 : \quad \dot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = \text{const} \text{ a z podmienky } x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0$$

$$(b) \quad T \geq 1 : \quad \dot{x} = 1 \quad t \in [0, T - 1] \Rightarrow x(t) = t + x_0 \text{ a } x(T - 1) = T - 1 + x_0$$

$$\dot{x} = 0 \quad t \in [T - 1, T] \Rightarrow x(t) = T - 1 + x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} t + x_0 & t \in [0, T - 1] \\ T - 1 + x_0 & t \in [T - 1, T] \end{cases}$$

5. POZNÁMKY

5.1 PPM a úloha variačného počtu.

V druhej kapitole sme sa zaoberali základnou úlohou variačného počtu

$$\min J = \int_0^T f^0(t, x, \dot{x}) dt$$

za podmienok $x(0) = x_0$ a $x(T) = x_T$.

Pre ňu sme odvodili Eulerovu rovnicu

$$\frac{\partial f^0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} = 0$$

V prípade, že x_T bolo voľné, tak sme dostali navyše $f_x^0|_{t=T} = 0$ a v prípade, že T bolo voľné $(f^0 - f_x^0 \dot{x})|_{t=T} = 0$.

Túto úlohu môžeme naformulovať ako ÚOR nasledovne

$$\dot{x} = u, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ dané}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T$$

$$\min J = \int_0^T f^0(t, x, u) dt$$

Je to neautonómna úloha s pevným časom bez ohraničení na riadiace a stavové premenné (označíme ju U1). Adjungovaná rovnica pre danú úlohu má tvar

$$((AR)) \quad \dot{\psi} = -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0}{\partial x} \right)^T$$

a podmienka maxima je

$$((PM)) \quad \psi^0 f^0(t, x, u) + \psi^T u \rightarrow \max_u$$

Ak by $\psi^0 = 0$, tak by sme v predchádzajúcej podmienke hľadali voľný extrém lineárnej funkcie a teda takáto úloha by nemala riešenie ($\psi \neq 0$). Preto $\psi^0 = -1$ a teda dostávame

$$(1) \quad \dot{\psi} = \left(\frac{\partial f^0}{\partial x} \right)^T$$

$$(2) \quad -f^0(t, x, u) + \psi^T u \rightarrow \max_u$$

Z podmienky maxima vyplýva, že

$$(3) \quad -\frac{\partial f^0}{\partial u} + \psi^T = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Pretože podmienka (3) platí $\forall t \in [0, T]$, tak aj

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial f^0}{\partial u} + \dot{\psi}^T = 0,$$

čo spolu s (1) a stavovou rovnicou dáva

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial f^0}{\partial x} = 0.$$

Dostali sme Eulerovu rovnicu. To znamená, že z PPM pre U1 dostaneme Eulerovu rovnicu.

V prípade, že $x(T)$ je voľné, tak PPM dáva podmienku transversality $\psi(T) = 0$ čo po dosadení do (3) dáva

$$\psi^T(T) = \left(\frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} \right)_{t=T} = 0.$$

V prípade, že T je voľné, tak PPM dáva $H|_{t=T} = 0$. To znamená, že

$$(-f^0 + \psi^T \dot{x})|_{t=T} = 0$$

$$\left(-f^0 + \frac{\partial f^0}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right) |_{t=T} = 0$$

5.2 Poznámka o ψ^0 .

(1) Pre úlohu $\min J$ stačilo uvažovať $\psi^0 = -1$ alebo $\psi^0 = 0$.

(2) Poznáme niektoré prípady, keď už z tvaru úlohy vieme vylúčiť prípad $\psi^0 = 0$

- úloha s voľným koncom ($\Rightarrow \psi(T) = 0 \Rightarrow \psi^0 \neq 0$)

- ak f je lineárna v u a nemáme ohraničenia na u ($\Rightarrow \psi^0 \neq 0$ ináč by PM nemal riešenie).

V ekonomickej literatúre sa často možno stretnúť, že je automaticky kladené $\psi^0 = 1$ (lebo ide zvyčajne o úlohy na maximum), bez overovania možnosti $\psi^0 = 0$. Nasledujúci príklad ukáže, že takýto prípad môže nastať.

Príklad.

$$\dot{x} = u^2, \quad t \in [0, T], T - \text{pevné}$$

$$x(0) = x(T) = 0$$

$$\min J = \int_0^T u dt$$

Riešenie: V tomto prípade je riadenie $u(t) \equiv 0$ jediné prípustné riešenie (pretože pre iné $u(t)$ je odozva $x(t)$ rastúca a teda nemôže spĺňať počiatočnú aj koncovú podmienku). Teda $u(t) \equiv 0$ je aj optimálne a malo by spĺňať PPM.

$$\psi^0 u + \psi u^2 \rightarrow \max_u$$

Nech $\psi^0 = -1$. Potom

$$-u + \psi u^2 \rightarrow \max_u$$

a pretože to je úloha na voľné maximum

$$(4) \quad 2\psi u - 1 = 0$$

z čoho dostávame

$$(5) \quad u = \frac{1}{2\psi}$$

Adjungovaná rovnica pre túto úlohu má tvar

$$\dot{\psi} = 0 \Rightarrow \psi(t) \equiv \text{konštanta} = A$$

Zrejme $A \neq 0$, lebo ináč (4) dáva $-1 = 0$. Vidíme teda, že optimálne riadenie $u(t) \equiv 0$ nie je v tvare (5) a teda nespĺňa PPM s $\psi^0 = -1$. Teda $u(t) \equiv 0$ musí spĺňať PPM s $\psi^0 = 0$ a teda

$$(6) \quad \psi u^2 \rightarrow \max_u$$

Ak $A < 0$ tak $u \equiv 0$ je naozaj riešením (6).

6. PPM AKO PROSTRIEDOK KVALITATÍVNEJ ANALÝZY

PPM umožňuje získať kvalitatívne výsledky aj pre všeobecne zadané úlohy. Ukážeme si to na úlohe o optimálnej spotrebe, ktorú sme sformulovali už skôr a riešili ako úlohu variačného počtu. Pripomeňme si formuláciu úlohy:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= iK - C \\ K(0) &= K_0 > 0 \\ K(T) &= K_T > 0 \\ \max \int_0^T e^{-t\delta} U(C(t)) dt &\implies \min \int_0^T -e^{-t\delta} U(C(t)) dt \end{aligned}$$

Túto úlohu budeme riešiť iba pri všeobecných predpokladoch $U_C > 0$, $U_{CC} < 0$. To znamená, že napriek tomu, že nebudeme poznať konkrétny tvar funkcie U , budeme vedieť pomocou PPM odvodiť niektoré zaujímavé kvalitatívne výsledky o správaní sa optimálneho riešenia.

Riešenie :

(PS) nie je, keďže máme úlohu s pevným koncom

$$(AR) \quad \dot{\psi} = -\psi^0 \frac{\partial(-e^{-t\delta} U(C(t)))}{\partial K} - \psi \frac{\partial(iK - C)}{\partial K} = -\psi i \Rightarrow \psi(t) = \alpha e^{-ti}$$

$$(HF) \quad H = -\psi^0 e^{-t\delta} U(C(t)) + \psi(iK - C)$$

$$(PM) \quad -\psi^0 e^{-t\delta} U(C) + \psi(iK - C) \longrightarrow \max_C$$

$$\begin{aligned}
& \text{keby } \psi^0 = 0 \Rightarrow \max_C \psi(iK - C) \Rightarrow \nexists \max \text{ pre } \alpha \neq 0 \\
& \Rightarrow \psi^0 = -1 \Rightarrow \max_C (e^{-t\delta} U(C) + \psi(iK - C)) \Leftrightarrow \max_C (e^{-t\delta} U(C) + \alpha e^{-ti} (iK - C)) \\
& \frac{\partial H}{\partial C} = e^{-t\delta} \dot{U}(\hat{C}) - \alpha e^{-ti} = 0 \quad \forall t \Rightarrow \dot{U}(\hat{C}) = \alpha e^{-t(i-\delta)} \\
& \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial C} = -\delta e^{-t\delta} \dot{U}(\hat{C}(t)) + e^{-t\delta} \ddot{U}(\hat{C}(t)) \dot{\hat{C}}(t) + \alpha i e^{-ti} = 0 \\
& e^{-t\delta} (-\delta \dot{U} + \ddot{U} \dot{\hat{C}}) = -\alpha i e^{-ti} \\
& -\delta \dot{U} + \ddot{U} \dot{\hat{C}} = -\alpha i e^{-t(i-\delta)} \\
& -\delta \dot{U} + \ddot{U} \dot{\hat{C}} = -i \dot{U} \\
& \dot{U}(i - \delta) = -\ddot{U} \dot{\hat{C}} \\
& (i - \delta) = -\frac{\ddot{U}}{\dot{U}} \dot{\hat{C}}
\end{aligned}$$

Ak $i > \delta$ potom $\dot{C} > 0$ a teda spotreba rastie v čase.

Ak $i < \delta$ potom spotreba klesá .

Ak $i = \delta$ potom spotreba je konštantná .

To znamená, ak úroková miera i je väčšia ako spotrebiteľova miera netrpezlivosti δ , tak vzniká tendencia odkladať spotrebu na neskôr a teda tok spotreby rastie v čase.

V prípade, že budeme špecifikovať funkciu spotreby ako $U(C) = \ln(C)$, môžeme vypočítať riadenie a odozvu v závislosti od parametrov T, K_0, K_T, i, δ .

Príklad: Úloha o plánovaní výroby.

Firma dostala objednávku v čase T dodať B jednotiek výrobku. Snaží sa nájsť plán výroby na splnenie objednávky za minimálnu cenu. Pritom predpokladáme:

- jednotková produkčná cena rastie lineárne (s konštantou $c_1 > 0$) s rýchlosťou produkcie

- jednotková cena za skladovanie výrobkov je konštantná ($=c_2 > 0$).

Označme

- $x(t)$ množstvo výrobku vyrobeného až do času t (akumulovaná výroba). Teda $x(0) = 0$, $x(T) = B$.

- $u(t)$ produkčná rýchlosť (rýchlosť zmien v zásobe výrobku). Teda $\dot{x}(t) = u(t)$, $u(t) \geq 0$.

Celková cena (výdavky firmy) v čase t :

$$c_1 u(t) \dot{x}(t) + c_2 x(t) = c_1 (u(t))^2 + c_2 x(t)$$

Úlohou je určiť $u(t)$ tak, aby

$$J = \int_0^T (c_1 u^2 + c_2 x) dt \rightarrow \min$$

Dostali sme nasledovnú ÚOR:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T) = B > 0, \quad u(T) \geq 0$$

$$J = \int_0^T (c_1 u^2 + c_2 x) dt \rightarrow \min$$

Možným produkčným plánom by mohlo byť produkovať rovnomerne rýchlosťou

$$u \equiv \frac{B}{T} \Rightarrow x = \frac{B}{T}t \Rightarrow J = c_1 \frac{B^2}{T} + c_2 \frac{BT}{2}$$

Toto je síce prípustný plán výroby, ale nie je optimálny.

Nájdime riešenie PPM. Zrejme

$$\dot{\psi} = -\psi^0 c_2 \quad (\text{AR})$$

$$\psi^0 (c_1 u^2 + c_2 x) + \psi u \rightarrow \max_{u \geq 0} \quad (\text{PM})$$

Vylúčme prípad $\psi^0 = 0$. Ak by $\psi^0 = 0$, potom z (AR) vyplýva, že ψ je konštantné a PM má tvar $\psi u \rightarrow \max_{u \geq 0}$. Z PM potom vyplýva, že ak $\psi > 0$, tak neexistuje riešenie PM, ak $\psi < 0$, tak $u \equiv 0$, ale to nie je prípustné riadenie (odozva nespĺňa koncovú podmienku).

Preto môžeme položiť $\psi^0 = -1$. Potom

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = c_2 &\Rightarrow \psi(t) = tc_2 + k \\ -(c_1 u^2 + c_2 x) + \psi u &\rightarrow \max_{u \geq 0} \end{aligned} \quad (\text{PM})$$

Voľný extrém spĺňa

$$-2c_1 u + \psi = 0 \Rightarrow u = \frac{\psi}{2c_1}$$

Preto riešením PM dostávame

$$u = \begin{cases} \frac{\psi}{2c_1} & \text{ak } \psi \geq 0, \\ 0 & \text{ak } \psi < 0 \end{cases}$$

Podľa toho, aké znamienka môže nadobúdať ψ na intervale $[0, T]$, dostávame tri možnosti.

(a) Ak $\psi(t) < 0 \quad \forall t \in [0, T]$, potom $u \equiv 0$, ale takéto riadenie je neprípustné.

(b) Ak $\psi(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T]$, t.j. $c_2 t + k \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, tak (z $t = T$) máme, že $k \geq 0$ a

$$u(t) = \frac{c_2 t + k}{2c_1}, \quad \forall t \in [0, T]$$

. Dosadením tohoto riadenia do stavovej rovnice a postupným použitím počiatočnej a koncovej podmienky dostávame

$$\dot{x}(t) = \frac{c_2 t + k}{2c_1} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + \frac{kt}{2c_1} + C$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + \frac{kt}{2c_1}$$

$$B = x(T) \Rightarrow k = \frac{2c_1 B}{T} - \frac{c^2 T}{2}$$

Ale pretože v tomto prípade musí platiť $k \geq 0$, tak dostávame

$$T \leq 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}}$$

(c) Posledná možnosť je, že existuje $t_1 \in (0, T)$ také, že $\psi(t_1) = 0$. Pretože ψ je rastúca, tak zrejme

$$\begin{aligned}\psi(t) &\leq 0, & t \in [0, t_1] \\ \psi(t) &> 0, & t \in (t_1, T]\end{aligned}$$

a tiež

$0 = \psi(t_1) = c_2 t_1 + k$, t.j. $t_1 = -\frac{k}{c_2}$, pričom zrejme $k < 0$. Máme teda

$$0 < t_1 = -\frac{k}{c_2} < T$$

a

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, -\frac{k}{c_2}] \\ -\frac{c_2 t + k}{2c_1} & t \in [-\frac{k}{c_2}, T] \end{cases} \quad (1)$$

Dosadením riadenia do stavovej rovnice dostávame

$$\begin{aligned}t \in [0, -\frac{k}{c_2}] : \quad \dot{x}(t) &= 0, \quad x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) \equiv 0, \\ t \in [-\frac{k}{c_2}, T] : \quad \dot{x}(t) &= \frac{c_2 t + k}{2c_1} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + \frac{k}{2c_1}t + D \\ 0 = x(-\frac{k}{c_2}) &= \frac{c_2 k^2}{4c_1 c_2^2} - \frac{k^2}{2c_1 c_2} + D = 0\end{aligned}$$

z čoho dostávame

$$D = \frac{k^2}{4c_1 c_2}$$

a teda

$$t \in [-\frac{k}{c_2}, T] : \quad x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + \frac{k}{2c_1}t + \frac{k^2}{4c_1 c_2}$$

Dosadením do koncovej podmienky $x(T) = B$ dostaneme , že

$$k = 2\sqrt{c_1 c_2 B} - c_2 T$$

a teda z (1) dostávame

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, T - \sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}}] \\ \frac{c_2}{2c_1}(t - T + 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}}) & t \in [T - 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}}, T] \end{cases}$$

To je v prípade, že

$$T > 2\sqrt{\frac{Bc_1}{c_2}}$$

a teda, ak je T dosť veľké, tak chvíľu nevyrábame nič a potom postupne zväčšujeme rýchlosť produkcie.

7. PPM PRE BOLZOVU ÚLOHU

Pod Bolžovou úlohou rozumieme ÚOR, kde účelová funkcia obsahuje aj fukciu koncového stavu systému, t.j., je to úloha

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [0, T], T - \text{pevné alebo voľné}$$

$$x(0) = x_0$$

$$g(x(T)) = 0$$

$$u \in U$$

$$J = \int_0^T f^0(t, x, u)dt + \varphi(x(T))$$

kde $\varphi : R^n \rightarrow R$. Pre túto úlohu chceme odvodiť nutné podmienky optimality. Je zrejmé, že tieto podmienky budú rovnaké ako pre úlohu, kde ku J bude pripočítaná konštanta, t.j. účelovou funkciou bude

$$\tilde{J} = \int_0^T f^0(t, x, u)dt + \varphi(x(T)) - \varphi(x(0)).$$

Podmienky odvodíme tak, že $\tilde{J}$ prevedieme na Lagrangeov tvar:

$$\tilde{J} = \int_0^T f^0(t, x, u)dt + \int_0^T \frac{d}{dt} \varphi(x(t))dt = \int_0^T [f^0(t, x, u) + \varphi'(x)f(t, x, u)]dt$$

To je už úloha v štandardnom tvare. Aplikujeme na ňu PPM. Dostaneme adjungovanú rovnicu

$$\dot{\tilde{\psi}} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} (f^0 + \varphi' f) \right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \tilde{\psi} \quad (\tilde{A}R)$$

z čoho po úprave dostávame

$$\dot{\tilde{\psi}} = - \left(\frac{\partial f^0}{\partial x} \right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} f \right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \tilde{\psi}$$

Podmienka transversality má tvar

$$\exists \chi : \quad \tilde{\psi}(T) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^T \chi \quad (\tilde{P}T)$$

a podmienka maxima

$$\psi^0(f^0 + \varphi' f) + \tilde{\psi}^T f \rightarrow \max_{u \in U} \quad (\tilde{P}M)$$

Úpravou dostávame

$$\psi^0 f^0 + \psi^T f \rightarrow \max_{u \in U}$$

kde sme označili

$$\psi^T = \psi^0 \varphi' + \tilde{\psi}^T$$

t.j.

$$\psi := \tilde{\psi} + (\psi^0 \varphi')^T$$

Vyrobme pre túto novú premennú diferenciálnu rovnicu

$$\dot{\psi} = \dot{\tilde{\psi}} + \frac{d}{dt}(\psi^0 \varphi')^T$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= - \left(\frac{\partial f^0}{\partial x} \right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} f \right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \tilde{\psi} + \psi^0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} f \right)^T \\ &= - \left(\frac{\partial f^0}{\partial x} \right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \left((\varphi' \psi^0)^T + \tilde{\psi} \right) = - \left(\frac{\partial f^0}{\partial x} \right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \psi \quad (\text{AR}) \end{aligned}$$

čo je adjungovaná rovnica v štandardnom tvare. Akú koncovú podmienku bude spĺňať ψ ?

$$\psi(T) = \tilde{\psi} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^T \psi^0 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^T \chi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^T \psi^0 \quad (\text{PT})$$

Vidíme, že jediné, čo sa zmenilo oproti štandardnému, je podmienka transversality. Odvođený výsledok môžeme sformulovať do vety.

Veta: PPM pre Bolžovu úlohu:. *Nech $\tilde{u}(t), \tilde{x}(t)$, $t \in [0, T]$ sú optimálne pre $B\tilde{U}$. Potom $\exists(\psi^0, \psi(t)) \neq (0, 0)$, $\psi^0 \leq 0$ také, že $\psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)$ spĺňajú (AR), (PT), (PM) a (PS), kde*

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f^0}{\partial x} \right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \psi \quad (\text{AR})$$

$$\exists \chi : \quad \psi(T) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^T \chi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^T \psi^0 \quad (\text{PT})$$

$$H(\hat{x}, \hat{u}, \psi^0, \psi) = \max_{u \in U} H(\hat{x}, u, \psi^0, \psi), \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{PM})$$

$$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 f^0(x, u) + \psi^T f(x, u)$$

$$H(\hat{x}, \hat{u}, \psi^0, \psi) \begin{cases} \equiv \text{konštanta} & - \text{autonómna, } T\text{-pevné} \\ |_{t=T} = 0 & - \text{neautonómna, } T\text{-voľné} \\ \equiv 0 & - \text{autonómna, } T\text{-voľné} \end{cases} \quad (\text{PS})$$

Príklad: Obchodovanie s komoditami.

Pri obchodovaní s komoditami (takými ako pšenica, káva, nafta) obchodníci nakupujú a znova predávajú komodity s cieľom získať profit. Možnosť úspechu závisí na sezónnych a dlhodobých zmenách ceny komodít. Veľká časť umenia úspešného obchodníka závisí od schopnosti robiť presnú predpoveď budúcich cien komodít na čo možno najdlhšie obdobie. Keď je urobená predpoveď ceny, je možné formulovať úlohu:

- určiť, kedy majú byť komodity nakúpené, kedy predané a kedy má byť obchodník pasívny. Ak je predpoveď ceny urobená na obdobie dĺžky T (T dosť veľké), potom úlohou je maximalizovať aktíva v čase T . Aktíva v čase T pozostávajú z hotovosti a komodít, ktoré vlastnime v čase T .

Neskôr, keď je zaznamenané skutočné chovanie ceny, je možné vypočítať, aký by bol býval maximálny profit, keby toto chovanie bolo známe a bola by použitá optimálna stratégia. Porovnanie medzi realizovaným a optimálnym profitom by mohlo byť použité ako indikátor na meranie obchodníkových schopností.

V praxi sú operácie predaja a nákupu diskkrétne, tu však použijeme spojitý model, ktorý je prehľadný a ľahký na ďalšiu analýzu.

Formulácia ako ÚOR:

$x^1(t)$ množstvo hotovosti v čase t ,

$x^2(t)$ množstvo komodity v čase t ,

$p(t)$ cena v čase t - daná funkcia,

$u(t)$ rýchlosť predávania, $(-1 \leq u \leq 1)$, záporné hodnoty predstavujú nakupovanie

Vlastnenie komodít vyžaduje poplatky za skladovanie, ktoré sú úmerné množstvu držaných komodít (s konštantou úmernosti $s > 0$)

sx^2 cena za skladovanie množstva komodity x_2 za jednotku času

Stavová rovnica má tvar

$$\dot{x}^1 = p(t)u(t) - sx^2(t) \quad x^1(0) = a^1$$

$$\dot{x}^2 = -u \quad x^2(0) = a^2 > 0$$

kde predpokladáme, že začíname v čase $t = 0$, kedy vlastnime komodity o množstve $a_2 > 0$ a máme k dispozícii hotovosť $a_1 > 0$. Konečný stav nie je určený, ale cieľom je maximalizovať aktíva v čase $t = T$, t.j.

$$x^1(T) + p(T)x^2(T) \rightarrow \max$$

Aplikácia PPM:

$$(PM) \quad \psi^1(pu - sx^2) - \psi^2 u \Big|_0^T \rightarrow \max_{u \in [-1,1]}$$

$$(\psi^1 p - \psi^2)u - \psi^1 sx^2 \rightarrow \max_{u \in [-1,1]}$$

$$u = \begin{cases} 1 & \text{ak } \psi^1 p - \psi^2 > 0 \\ -1 & \text{ak } \psi^1 p - \psi^2 < 0 \\ \text{neurčené} & \text{ak } \psi^1 p - \psi^2 = 0 \end{cases}$$

$$(AR) \quad \dot{\psi}^1 = 0 \quad \Rightarrow \psi^1(t) \equiv 1$$

$$\dot{\psi}^2 = s\psi^1 \quad \Rightarrow \psi^2(t) = st + k$$

$$(PT) \quad \psi^1(T) = -\psi^0 = 1$$

$$\psi^2(T) = -p(T)\psi^0 = p(T)$$

Tu sme položili $\psi^0 = -1$, lebo predpoklad $\psi^0 = 0$ dáva $\psi^1(T) = \psi^2(T) = 0$, čo spor s PPM. Teraz môžeme nájsť riešenie AR spĺňajúce podmienku transversality, ktorým je

$$\begin{aligned}\psi^1(t) &= 1 \\ \psi^2(t) &= s(t - T) + p(T)\end{aligned}$$

Dostávame teda

$$u(t) = \text{sgn}(\psi^1(t)p(t) - \psi^2(t)) = \text{sgn}(p(t) - p(T) + s(T - t))$$

a teda riadenie vieme určiť pre ľubovoľnú cenovú funkciu $p(t)$.

Nech napríklad cenová funkcia je daná nasledovným predpisom

$$p(t) = \begin{cases} p_0 - p_1 t & \text{ak } t \in [0, T/2] \\ p_0 + p_1(t - T) & \text{ak } t \in [T/2, T] \end{cases}$$

kde $p_0, p_1 > 0$. To znamená na polovičke uvažovaného obdobia najprv cena klesá rýchlosťou p_1 a na druhej polovici rastie tou istou rýchlosťou, v dôsledku čoho $p(0) = p(T)$. Označme

$$v(t) := p(t) - p(T) + s(T - t)$$

Je ľahko vidieť, že

$$v(t) = \begin{cases} sT - t(p_1 + s) & t \in [0, T/2] \\ T(s - p_1) + t(p_1 - s) & t \in [T/2, T] \end{cases}$$

Znamienko funkcie $v(t)$ rozhoduje o tom, aké bude riadenie. Všimnime si, že

$$v(0) = sT, \quad v(T) = 0$$

to znamená, že spojitá funkcia $v(t)$ začína kladnými hodnotami a končí v nule. Nadobudne niekde aj záporné hodnoty?

Vidieť, že na intervale $[0, T/2]$ je vždy klesajúca. Na intervale $[T/2, T]$ jej správanie závisí od znamienka výrazu $p_1 - s$. Uvažujme všetky tri možnosti:

(a) $s > p_1$

t.j. $v(t)$ je aj na $[T/2, T]$ klesajúca a $v(T) = 0 \Rightarrow v(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T] \Rightarrow u(t) \equiv 1$ $x^2(t) = a^2 - t$ To znamená, že cena za skladovanie príliš vysoká a teda predávame maximálnou rýchlosťou.

(b) $s < p_1$

To znamená, že na prvom intervale $v(t)$ klesá a na druhom rastie do nuly. $\Rightarrow \exists t_s \in [0, T/2] : sT - t_s(p_1 + s) = 0 \Rightarrow t_s = \frac{sT}{p_1 + s} \Rightarrow$

$$u = \begin{cases} 1 & t \in [0, t_s] \\ -1 & t \in [t_s, T] \end{cases}$$

To znamená, že najprv predávame maximálnou rýchlosťou a potom v určitom predstihu pred zmenou vývoja ceny začneme maximálnou rýchlosťou nakupovať.

(c) $s = p_1$

V tomto prípade dostávame

$$v(t) = \begin{cases} sT - 2ts & t \in [0, T/2] \\ 0 & t \in [T/2, T] \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T/2] \\ \text{neurčené} & t \in [T/2, T] \end{cases}$$

pričom pre cenu platí $p(t) = st + p_0 - sT \Rightarrow \dot{p} = s \quad t \in [T/2, T]$ Ukážeme, že hodnota účelovej funkcie $\phi(x(t))$ sa v tomto prípade na danom intervale nemení a nezávisí od riadenia. Zo stavovej rovnice máme

$$\dot{x}^1 = -p(t)\dot{x}^2(t) - sx^2(t) = -\frac{d}{dt}(p(t)x^2(t)) \Rightarrow$$

$$x^1 = -p(t)x^2(t) + K \quad t \in [T/2, T]$$

$$\phi(x(t)) = -x^1(t) - p(t)x^2(t) = -p(t)x^2(t) - k + p(t)x^2(t) = -k, \quad \forall t \in [T/2, T]$$

To znamená, že v tomto prípade je na danom intervale optimálne akékoľvek riadenie (z intervalu $[-1, 1]$).

8. EKONOMICKÁ INTERPRETÁCIA PPM.

DYNAMICKÉ PROGRAMOVANIE PRE SPOJITÉ ÚLOHY.

V diskretnom prípade sme mali dva teoretické a praktické nástroje na analýzu úloh optimálneho riadenia:

- princíp resp. pseudoprincíp maxima (ako nutnú podmienku) a
- rovnicu dynamického programovania (ako nutnú a postačujúcu resp. len nutnú podmienku).

V spojitom prípade sme Pontrjaginov princíp maxima už formulovali a (na rozdiel od diskretného prípadu, kde princíp maxima platí iba za určitých predpokladov pre úlohy s pevným časom) tu platí za veľmi všeobecných podmienok. Ako je to s rovnicou dynamického programovania?

V diskretnom prípade RDP predstavovala účinný nástroj na riešenie úloh a platila pri veľmi všeobecných predpokladoch. Uvidíme, že v spojitom prípade je RDP nutnou a postačujúcou podmienkou optimality pri veľmi špeciálnych a obmedzujúcich podmienok.

Naším cieľom bude, bez nejakých veľkých nárokov na matematickú presnosť odvodiť RDP pre spojité úlohy a ukázať na súvis medzi RDP a PPM. Toto nám umožní zaujímavým spôsobom interpretovať adjungovanú premennú ako tieňovú cenu, čo má význam pri riešení niektorých ekonomických problémov.

8.1. Odvodenie RDP.

RDP odvodíme pre ŠÚOR s pevným časom. Kvôli ľahšej interpretácii budeme uvažovať úlohu na maximum, to znamená, budeme sa zaoberať úlohou

$$\dot{x}(s) = f(x(s), u(s)), \quad s \in [0, T], \quad T - \text{pevné}$$

$$x(0) = x_0$$

$$x(T) \in C$$

$$u(s) \in U, \quad s \in [0, T]$$

$$\max \int_0^T f^0(x(s), u(s)) ds$$

Toto je úloha optimálneho prechodu z x_0 do C na intervale $[0, T]$. V závislosti od počiatku času 0 a počiatočného stavu x_0 ju označíme $D(0, x_0)$. Podobne ako v diskretnom prípade vnoríme túto úlohu do systému úloh

$$D = \{D(t, x), t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n\}$$

kde $D(t, x)$ je úloha optimálneho prechodu z bodu x do C na intervale $[t, T]$. To znamená, $D(t, x)$ je ÚOR daná nasledovne

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= f(x(s), u(s)), \quad s \in [t, T], \quad T - \text{pevné} \\ x(t) &= x \\ x(T) &\in C \\ u(s) &\in U, \quad s \in [t, T] \\ \max J_{t,x}(u(\cdot)) &= \int_t^T f^0(x(s), u(s)) ds \end{aligned}$$

Ďalej označíme

$$V(t, x) = \max_{u(\cdot)} J_{t,x}(u(\cdot))$$

kde maximum hľadáme cez všetky prípustné riadenia $u(\cdot)$. Je zrejmé, že táto funkcia nemusí byť definovaná pre všetky $t \in [0, T]$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Táto funkcia sa nazýva *hodnotová funkcia pre systém úloh D*. Podobne ako v diskretnom prípade, aj tu platí

Princíp optimality. Ak $\hat{u}(\cdot), \hat{x}(\cdot)$ sú optimálne pre $D(t_1, x)$, $t_1 < t_2 < T$, potom $\hat{u}(\cdot)|_{[t_2, T]}, \hat{x}(\cdot)|_{[t_1, T]}$ sú optimálne pre $D(t_2, \hat{x}(t_2))$.

Dôkaz. Je úplne analogický ako v diskretnom prípade (Veta 1 pre diskkrétne úlohy).

Na základe tejto vety môžeme pre optimálne riadenie $\hat{u}$ a jeho odozvu $\hat{x}$ písať $\hat{u}(t) = v(t, \hat{x}(t))$, t.j., platí analógia Vety 2 (z časti skript pre diskkrétne úlohy), ale len v jednom smere. Opačná implikácia vo všeobecnosti neplatí. Ak by sme totiž funkcie $v(t, x)$, ktoré môžu byť nespojité v premennej x , dosadili do stavovej rovnice, dostali by sme diferenciálne rovnice $\dot{x} = f(x, v(t, x))$ nespojité v stavovej premennej, pre ktoré neplatí klasická teória diferenciálnych rovníc.

Teraz odvodíme RDP. Nech $V(t, x) \in C^1$ je hodnotová funkcia. Potom

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \max_{\substack{u(s) \\ t \leq s \leq T}} \int_t^T f^0(x, u) ds = \max_{\substack{u(s) \\ t \leq s \leq t+\Delta t \\ t+\Delta t \leq s \leq T}} \left[\int_t^{t+\Delta t} f^0(x, u) ds + \int_{t+\Delta t}^T f^0(x, u) ds \right] = \\ &= \max_{\substack{u(s) \\ t \leq s \leq t+\Delta t}} \left[\int_t^{t+\Delta t} f^0(x, u) ds + \max_{\substack{u(s) \\ t+\Delta t \leq s \leq T}} \int_{t+\Delta t}^T f^0(x, u) ds \right] = \\ &= \max_{\substack{u(s) \\ t \leq s \leq t+\Delta t}} \left[\int_t^{t+\Delta t} f^0(x, u) ds + V(t + h, x(t + h)) \right] = \end{aligned}$$

$$= \max_{\substack{u(s) \\ t \leq s \leq t + \Delta t}} \left[f^0(x(\xi), u(\xi)) \Delta t + V(t, x) + \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \cdot f(x, u) \right) \Delta t + o(\Delta t) \right]$$

kde $\xi \in [t, t + \Delta t]$. (Použili sme vetu o strednej hodnote integrálu na prvý sčítanec a Taylorovu vetu na druhý.) Porovnaním začiatku a konca tohoto odvodovania dostaneme

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) \cdot \Delta t = \max_{\substack{u(s) \\ t \leq s \leq t + \Delta t}} \left[f^0(x(\xi), u(\xi)) \Delta t + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(x, u) \Delta t + o(\Delta t) \right]$$

Vydělíme výrazom Δt a prejdeme k limite pre $\Delta t \rightarrow 0$. Dostaneme

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) = \max_{u(t)} \left[f^0(x(t), u(t)) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(x, u) \right]$$

okrajová podmienka : $V(T, x) = 0, \forall x \in C$

Označme

$$G = \{(t, x) \mid \exists \text{ príp. riadenie pre } D(t, x)\}$$

Veta. *Nech*

- (1) *Vnútro G^0 je husté v G*
- (2) *$V : G \rightarrow R, V \in C^1$
 $v : G \rightarrow U \subset R^m, v \in C, v$ lipschitzovská v x*
- (3) *Každé riešenie $x(s)$ diferenciálnej rovnice $\dot{x} = f(x, v(s, x))$ spĺňajúce počiatočnú podmienku $x(t) = x$ existuje na celom intervale $[t, T]$ a spĺňa : $x(T) \in C, x(s) \in G$ pre všetky $s \in [t, T]$*

Potom v je optimálna spätná väzba a V je hodnotová funkcia pre systém úloh D vtedy a len vtedy keď

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) &= f^0(x, v(t, x)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \cdot f(x, v(t, x)) = \\ &= \max_{u \in U} \left[f^0(x, u) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) f(x, u) \right], \\ V(T, x) &= 0, \quad \forall x \in C. \end{aligned}$$

Poznámky :

1. V autonómnej úlohe je $V(t, x) \equiv V(x)$ a teda $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.
2. Predpoklady spojitosti a spojitej diferencovateľnosti kladené na funkcie v a V nás neuspokojujú, lebo sú príliš silné. Väčšina úloh ich nespĺňa.

8.2. Vzťah RDP a PPM.

V tejto časti ukážeme ako súvisí RDP s PPM (s (AR) a (PM)).

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \max_{u \in U} \left[f^0(\hat{x}, u) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, \hat{x}) f(\hat{x}, u) \right] &= \\ = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + f^0(\hat{x}, \hat{u}) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, \hat{x}) f(\hat{x}, \hat{u}) &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Označme

$$\psi^0 := 1, \quad \psi^T := \frac{\partial V}{\partial x}(t, \hat{x})$$

Potom vzťah (*) dáva

$$f^0(\hat{x}, \hat{u}) + \psi^T f(\hat{x}, \hat{u}) = \max_{u \in U} [f^0(\hat{x}, u) + \psi^T f(\hat{x}, u)]$$

čo je (PM) s $\psi^0 = 1$. Treba ešte odvodiť (AR).

$$\dot{\psi}^T = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x}(t, \hat{x}) = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x}(t, \hat{x}) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \hat{x}) \dot{x} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x}(t, \hat{x}) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \hat{x}) f(x, u)$$

Toto zatiaľ vôbec nepripomína (AR). Pomôžeme si pomocou RDP. Uvažujme RDP najprv pre $x = \hat{x}$, $u = v(t, \hat{x}) = \hat{u}$. Zrejme

$$\frac{\partial V(t, \hat{x})}{\partial t} + f^0(\hat{x}, \hat{u}) + \frac{\partial V(t, \hat{x})}{\partial x} f(\hat{x}, \hat{u}) = 0$$

Teraz uvažujme RDP pre x ľubovoľné, a pre $u = \hat{u} = v(t, \hat{x})$. Pre toto ľubovoľne zvolené x hodnota $\hat{u}$ nemusí byť tou, kde sa maximalizuje výraz v RDP a preto

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + f^0(x, \hat{u}) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(x, \hat{u}) \leq 0$$

Funkcia na ľavej strane posledného výrazu teda nadobúda svoje maximum v bode $x = \hat{x}$. Aplikujme nutné podmienky optimality

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + f^0(x, \hat{u}) + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(x, \hat{u}) \right)_{x=\hat{x}} = 0$$

To znamená

$$\frac{\partial^2 V(t, \hat{x})}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f^0(\hat{x}, \hat{u})}{\partial x} + \frac{\partial^2 V(t, \hat{x})}{\partial x^2} f(\hat{x}, \hat{u}) + \frac{\partial V(t, \hat{x})}{\partial x} \frac{\partial f(\hat{x}, \hat{u})}{\partial x} = 0$$

Dosadíme do výrazu pre $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi}^T = -\frac{\partial f^0(\hat{x}, \hat{u})}{\partial x} - \frac{\partial V(t, \hat{x})}{\partial x} \frac{\partial f(\hat{x}, \hat{u})}{\partial x}$$

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f^0}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \psi \quad (\text{AR})$$

a to je (AR) s $\psi^0 = 1$.

Toto celé sme robili formálne a nestarali sme sa o oprávnenosť jednotlivých operácií. Dalo by sa to urobiť a korektne, pri formulovaní určitých predpokladov, celý výklad by však bol dlhý a neprehľadný.

8.3. Ekonomická interpretácia PPM.

V predchádzajúcich častiach sme hovorili o tom, že PPM je dobrým nástrojom na kvalitatívnu analýzu ekonomických úloh. Mnohé ekonomické problémy sa dajú formulovať ako úlohy optimálneho riadenia. Aplikáciou PPM na takéto úlohy sa dajú odvodiť mnohé kvalitatívne vlastnosti takýchto úloh. Pri tom je mimoriadne dôležité, vedieť správne ekonomicky interpretovať odvodené kvalitatívne vzťahy. K tomu je treba mať určitú ekonomickú predstavu o veličinách vstupujúcich do analýzy. O vstupných veličinách, pomocou ktorých formulujeme daný problém je zvyčajne dobrá ekonomická predstava (napr. x množstvo kapitálu u vstup, rozhodnutia ovplyvňujúce množstvo kapitálu, f^0 úžitok, zisk, náklady). Výsledky analýzy však bývajú formulované aj pomocou pomocných veličín, ktorými v prípade PPM sú adjungované premenné. Preto je dôležité vedieť aj tieto premenné ekonomicky interpretovať.

Odvodili sme, že adjungovaná premenná, ktorá vstupuje do formulácie PPM je vlastne gradientom hodnotovej funkcie (podľa stavovej premennej), t.j.

$$\boxed{\psi(t)^T = \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}}.$$

Použitím Taylorovej vety dostávame

$$V(t, x + \Delta x) - V(t, x) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \Delta x + o(\Delta x).$$

V prípade, že Δx je jednotkový prírastok, tak $\psi(t)$ vyjadruje lineárnu časť prírastku hodnotovej funkcie, t.j. marginálnu hodnotu jednej jednotky kapitálového majetku v čase t . Každá zložka $\psi^i(t)$ udáva, nakoľko je cenné mať "malú" jednotku premennej stavu $x^i(t)$ za predpokladu, že sa pre zvyšok plánovaného obdobia bude plánovať optimálne. Pritom $\psi(t)$ je tieňová cena, pretože nepredstavuje na kapitálovom trhu panujúcu tržnú cenu, ale iba firemnú, vnútornú, účtovnícku cenu, ktorá hodnotí dodatočnú jednotku kapitálu.

Odvodíme, že adjungovaná premenná má rozmer ceny. Ak účelová funkcia má rozmer ekonomickej hodnoty (ako užitočnosť, zisk, tržba, náklady), t.j. predstavuje $[J] = [cena] \cdot [množstvo]$ a zložky stavovej premennej majú rozmer množstva $[x^i] = [množstvo]$, potom adjungovaná premenná má rozmer ceny, lebo

$$[\psi^i] (= \frac{\partial V}{\partial x^i}) = \frac{[cena][množstvo]}{[množstvo]} = [cena]$$

Všimnime si teraz, že podmienku maxima z PPM možno tiež ekonomicky interpretovať. Podmienka maxima hovorí, že v každom časovom okamžiku sa má maximalizovať výraz

$$H = f^0 + \psi^T f = f^0 + \psi^T \dot{x}$$

kde H je vlastne súčtom bezprostredného zisku a hodnoty zmeny kapitálových zásob.